Leichtes

Lehrbuch

der

Arithmetik, Geometrie

und

Trigonometrie

für die

erſten Anfänger

von

D. Friedr. Wilhelm Daniel Snell,

Profeſſor der Philoſophie zu Gießen.

Zweyter Theil.

Geometrie.

Vierte verbeſſerte Auflage.

Gießen und Darmſtadt,

bey Georg Friedrich Heyer 1813.

Leichtes

Lehrbuch

der

Geometrie

und

Trigonometrie

für die

erſten Anfänger

von

D. Friedr. Wilhelm Daniel Snell,

Profeſſor der Philoſophie zu Gießen.

Vierte verbeſſerte Auflage.

Mit 5 Kupfertafeln.

Gießen und Darmſtadt,

bey Georg Friedrich Heyer 1813.

Vorerinnerung.

Dieses Lehrbuch ist für den ersten Cursus der Geometrie, sowohl in Bürgerschulen als Gymnasien bestimmt. Natürlich wird vorausgesetzt, daß der Lehrling schon Unterricht in der Arithmetik erhalten, und vorzüglich die Lehre von den Verhältnissen gefaßt habe, auch die Quadratwurzel auszuziehen verstehe. Daß der Verfasser die beträchtliche Zahl der Elementargeometrieen mit einer neuen vermehrt, wird wohl theils durch den allgemeinen Grund entschuldigt werden können, daß jeder Lehrer beym Unterrichte, wenn es möglich ist, gern seinen eigenen Leitfaden gebraucht; theils durch die ziemlich allgemein zugestandene Wahrheit, daß in Ansehung der Methode bey dem ersten Unterrichte, noch manches zur Erleichterung für den Lehrling und Erweckung seines Interesse an dieser nützlichen Wissen-

schaft geschehen kann. Ob der Verfasser hierzu auch etwas beygetragen habe, mögen Sachverständige entscheiden. Wenigstens war es sein ernstliches Bestreben. Daß er die Trigonometrie (aus der Lehre von den Chorden entwickelt, und als einen Theil der Geometrie) mit aufgenommen, auch bey der Anwendung der theoretischen Sätze auf Berechnung der Flächen und Körper, Aufnehmung der Felder u. s. w. sich nicht allzukurz gefaßt hat, wird hoffentlich nicht gegen den Zweck dieses Lehrbuchs seyn. Bey der zweyten Auflage sind, ausser den nöthigen Verbesserungen und Zusätzen, hier und da Nachweisungen auf des Verfassers kleines Lehrbuch der Arithmetik beygefügt worden, welches auch als das erste Bändchen dieses Cursus der reinen Mathematik verkauft wird. Auch bey der dritten und vierten Auflage sind einige Veränderungen und Zusätze beygefügt, und die Druckfehler der vorigen Ausgaben verbessert worden.

Erstes

Erstes Kapitel.

Erklärungen von Linien, Winkeln und Figuren.

§. 1.

Erklärung.

Die Geometrie lehret, wie man die Größe ausgedehnter Dinge, nämlich der Linien, Flächen und Körper, ausmessen soll, z. B. die Länge eines Grabens, eines Wegs, die Breite eines Flusses, die Höhe eines Thurms, die Fläche eines Ackers, den körperlichen Inhalt eines Kastens, einer Klafter Holzes u. dergl.

§. 2.

Erklärung.

Eine mathematische Linie ist eine Länge, ohne Breite und Dicke. Der Anfang und das Ende derselben sind mathematische Punkte. Ein mathematischer Punkt ist bloß die Gränze einer Linie, und hat keine Länge, Breite und Dicke, oder er hat gar keine Ausdehnung.

§. 3.

Anmerkung.

Die mathematischen Linien und Punkte kann man nur in Gedanken zeichnen, diejenigen, welche wirklich auf ein Papier oder eine Tafel gezeichnet werden, kön-

nen nie so fein ausfallen, daß sie gar keine Breite hätten, und heißen daher, zum Unterschiede von jenen, physische Linien und Punkte. Es ist aber nöthig, wenn man genaue Zeichnungen liefern will, daß man die Linien so fein als möglich ziehe.

Da der Punkt nur die Gränze der Linie ist, so ist er gar kein Theil derselben; denn sonst wäre er selbst eine kleine Linie. Es wäre daher unrichtig, wenn man sagen wollte, daß eine Linie aus vielen Punkten zusammengesetzt sey.

§. 4.

Erklärung.

Eine grade Linie ist eine solche, welche weder zur Rechten noch zur Linken von ihrer ersten Richtung abweicht (fig. 1.). Man benennt eine Linie gewöhnlich mit zwey Buchstaben, welche am Anfange und am Ende stehen, so wie hier die Linie ab. Eine krumme Linie weicht von ihrer ersten Richtung beständig ab.

§. 5.

Grundsatz.

Zwischen zwey Punkten ist nur eine grade Linie möglich, aber unzählich viele krumme. Die grade Linie ist die kürzeste unter denselben. Zwey grade Linien können daher auch keinen Raum einschließen. Auch ist die Richtung einer graden Linie durch zwey Punkte vollkommen bestimmt.

§. 6.

Anmerkung.

Um Linien auf dem Papiere zu ziehen, gebraucht man ein richtiges Lineal und einen guten Bleystift oder eine Reißfeder. Auf einen Balken zieht man eine grade

grade Linie gewöhnlich durch eine schwarzgefärbte Schnur, welche noch naß ist. Auf dem Felde durch eine Schnur, welche an zwey Stäbe, die im Anfangs- und Endpunkte der Linie stehen, gespannt ist, oder, wenn sie lang ist, durch Stäbe, die in grader Richtung hinter einander gesteckt sind (wovon in der Folge noch mehr gesagt werden wird.)

§. 7.

Erklärung.

Wenn man eine grade Linie messen will, so gebraucht man dazu eine grade Linie von willkührlicher Länge, welche eine **Ruthe** heißt. Die geometrische Ruthe wird in 10 **Schuhe**, der Schuh in 10 **Zolle**, der Zoll in 10 **Linien** getheilt.

§. 8.

Anmerkung.

Man theilt im gemeinen Leben die Ruthe in 12, oder 16, oder 18 Schuhe. Die rheinländische Ruthe hält 12 Schuhe. Für diese Maaße hat man folgende Zeichen angenommen: eine Ruthe (o), Schuh ('), Zoll (''), Linie ('''). Z. B. 14 Ruthen, 9 Schuhe, 5 Zolle, 2 Linien, schreibt man: 14° 9' 5'' 2'''.

Am bequemsten ist die in der Geometrie gewöhnliche Decimaleintheilung, weil man durch Multiplication und Division mit 10 die größern Maaße leicht in die kleinern, oder die kleinern in die größern verwandeln kann. Z. B. 6° sind 60' oder 600''. Man darf also nur ein, zwey Nullen anhängen, um die Zahl der Ruthen in Schuhen oder Zollen auszudrücken. — Ferner: 325'' sind 3° 2' 5''. Hier wird die letzte Ziffer zur rechten Seite die Zolle bedeuten, die zweyte die Schuhe, die dritte die Ruthen.

§. 9.

Erklärung.

Eine ebene Fläche ist diejenige, welche so beschaffen ist, daß, wenn man innerhalb derselben aus irgend einem Punkte a grade Linien nach b, c, d, e zieht, diese ganz in die Ebene fallen (fig. 3.). Eine krumme Fläche ist eine solche, von welcher kein Theil eben ist.

§. 10.

Anmerkung.

Die krummen Flächen sind entweder doppelt oder einfach gekrümmt. Zu den erstern gehört die Kugelfläche, die Fläche eines Ey's u. d. gl., da man nach keiner Richtung grade Linien in ihnen ziehen kann. Zu den leztern gehört die Fläche eines runden, überall gleich dicken Körpers (z. B. einer Walze, Radwelle), in welcher man nach gewissen, aber nicht nach allen Richtungen grade Linien ziehen kann, die ganz in die Fläche fallen.

Wenn man von einer Ebene oder Fläche schlechthin redet, so versteht man darunter eine ebene Fläche.

§. 11.

Erklärung.

Wenn sich eine grade Linie ab um den einen feststehenden Endpunkt a drehet, so beschreibt der andere Endpunkt b eine in sich selbst zurückkehrende Linie, welche ein Cirkel oder Kreis genannt wird (fig. 4.). Der feststehende Endpunkt a ist der Mittelpunkt oder das Centrum; die von dem Punkte b be-

beschriebene Linie ist die Peripherie oder der Umfang des Kreises, die Linie ab heißt der Halbmesser (radius).

§. 12.

Anmerkung.

Alle Halbmesser eines Kreises sind gleich groß, weil alle Punkte der Peripherie von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt sind.

§. 13.

Erklärung.

Eine grade Linie ab (fig. 5.), welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht, heißt sein Durchmesser (diameter). Der Durchmesser ist der doppelte Halbmesser, daher sind alle Durchmesser eines Kreises gleich groß. — Eine Linie cd, welche nicht durch den Mittelpunkt geht, heißt eine Sehne oder Chorde. Dergleichen Sehnen können unzählich viele in einen Kreis gezeichnet werden, die immer größer werden, je näher sie dem Mittelpunkte liegen; die größte Sehne ist der Durchmesser.— Ein Stück der Peripherie, z. B. cmd, heißt ein Bogen. — Die Fläche zwischen einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen, z. B. zwischen cd und cmd, heißt ein Abschnitt.— Die Fläche, welche zwischen zwey Radien eb und ef, und dem Bogen fb liegt, heißt ein Ausschnitt.— Eine grade Linie op, welche die Peripherie des Kreises in einem Punkte m berührt, heißt eine Tangente des Kreises. Jede Sehne schneidet den Umfang des Kreises in zwey Punkten, da er eine zusammenhängende krumme Linie ist.

§. 14.

§. 14.
Anmerkung.

Um Kreise auf dem Papiere zu zeichnen, gebraucht man Instrumente, welche Cirkel heißen. Man hat sie von mancherley Art, größere und kleinere, solche, wo man statt des einen Cirkelfußes einen Bleystift, eine Reißfeder u. s. w. einschrauben kann.

Auf dem Felde zeichnet man die Kreise mit einer Schnur, deren eines Ende an einem eingesteckten Stabe festhängt, worauf das andere Ende nebst einem daran befestigten spitzigen Stäbchen herum geführt wird. Man gebraucht dazu auch einen Stangencirkel (fig. 6.), einen Stab mit 2 eisernen Spitzen, deren eine am Ende des Stabes fest steht, die andere aber vermittelst einer Hülse hin- und hergeschoben und festgeschraubt werden kann. Der Stab muß in Schuhe und Zolle getheilt seyn. Gesetzt ein Kreis sollte einen Halbmesser von 9 Schuhen bekommen; so setzt man die eine Spitze ins Centrum, schiebt die andere bis auf 9 Schuhe davon, schraubt sie fest und führt den Stab herum, so beschreibt diese letztere Spitze die Peripherie des Kreises.

§. 15.
Erklärung.

Die Peripherie jedes Kreises, er mag groß oder klein seyn, wird in 360 gleiche Theile getheilt, welche Grade heißen. Ein Halbkreis hält also 180 Grade, und der vierte Theil des Kreises, oder ein Quadrant, hält 90 Grade. (Wenn diese Theilung auch nicht wirklich geschieht, so kann man sie doch in Gedanken verrichten, oder kann sich vorstellen, als sey jeder Kreis in 360 Grade getheilt.)

§. 16.

§. 16.

Anmerkung.

Es ist an sich willkührlich, wie groß die Anzahl der Grade seyn soll; denn man hätte auch statt 360 nur 100 oder 200 Grade annehmen können. Wahrscheinlich ist diese Zahl deswegen gewählt worden, weil sie sich mit vielen Zahlen gerade dividiren läßt. Man kann nämlich die Peripherie eines Kreises leicht in 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 gleiche Theile theilen, ohne daß ein Rest übrig bleibt.

§. 17.

Erklärung.

Jeder Grad wird in 60 gleiche Theile getheilt, welche Minuten heißen, jede Minute in 60 Secunden, jede Secunde in 60 Tertien. (Diese Benennungen kommen auch bey der Eintheilung der Zeit vor. Uebrigens läßt sich, wenn sie in Schriften vorkommen, leicht bemerken, ob von Kreisbogen oder von Zeittheilchen die Rede ist.)

§. 18.

Anmerkung.

Die Bezeichnung ist wie bey Ruthen, Schuhen und Zollen. Wenn man z. B. einen Bogen gemessen hat, welcher 6 Grade, 19 Minuten, 12 Secunden, 10 Tertien groß ist; so schreibt man: er hält 6° 19′ 12″ 10‴. Aus dem Zusammenhange wird man in jeder Stelle eines Buchs leicht sehen, ob daselbst von der Länge einer geraden Linie oder eines Kreisbogens die Rede ist, ob also Ruthen, Schuhe und Zolle, oder Grade, Minuten und Secunden durch diese Zeichen angedeutet werden.

§. 19.

§. 19.
Erklärung.

Kreise von verschiedener Größe, die um einen und denselben Mittelpunkt gezeichnet werden, heißen concentrische Kreise (fig. 7.) Wenn um den Mittelpunkt a die Halbmesser ad und ab geführt werden, so ist zwar der Bogen de länger, als der Bogen bc, aber die Zahl der Grade ist doch bey beyden gleich. Denn weil die Peripherie jedes Kreises 360 Grade hält, so werden die Grade des kleinern Kreises kleiner, als die Grade des größern Kreises seyn. Also wird der Bogen bc kleinere Grade, als der Bogen de, und dennoch beyde gleich viele enthalten.

§. 20.
Anmerkung.

Die Größe eines solchen Bogens messet man mit einem hölzernen oder messingenen Halbkreise, welcher in seine 180° getheilt ist, und Transporteur heißt (fig. 8.) Man legt ihn mit seinem Mittelpunkte an den Mittelpunkt des Kreises a, so, daß das Lineal mn an dem Radius ad genau anliegt. Alsdann fällt ein Stück des Halbkreises mr zwischen die Linien ad und ae. Die Grade des Bogens mr werden von m nach r gezählt, und zeigen an, wie viele Grade der Bogen de hält.

§. 21.
Erklärung.

Die Neigung zweyer graden Linien ab und ac in einem Punkte a heißt ein Winkel (angulus) (fig. 9.) Der Punkt a, wo sich die Linien durchschneiden, heißt die Spitze des

Win-

Winkels (vertex), die Linien ab und ac heißen die Schenkel oder Seiten desselben (crura). Diese Linien müssen, wenn sie sich schneiden sollen, in einer und derselben Ebene liegen. Auf der Seite, wo sie sich einander nähern, heißen sie convergent; auf der andern Seite, wo sie sich von einander entfernen, divergent.

§. 22.

Anmerkung.

Um die Größe eines solchen Winkels zu bestimmen, stelle man sich vor, als wenn die Spitze desselben in dem Mittelpunkte eines Kreises läge, alsdann fällt ein Bogen des Kreises zwischen die Schenkel, welcher das Maaß des Winkels ist (wie in der 8ten Figur). Man messet daher einen Winkel auch mit dem Transporteur (§. 20.) Hieraus ist klar, daß nicht die Länge oder Kürze der Schenkel, sondern die Neigung derselben die Größe der Winkel bestimmet.

§. 23.

Anmerkung.

Man kann die Winkel auf dreyerley Art bezeichnen, und wir werden uns in der Folge bald der einen, bald der andern bedienen. 1) Entweder benennt man ihn mit einem Buchstaben auswendig an der Spitze (wie fig. 9. der Winkel a oder $\sphericalangle$ a), 2) oder mit einem Buchstaben, der inwendig an die Spitze gesetzt wird (wie fig. 10. die Winkel m und n), 3) oder mit drey Buchstaben, welche an den beyden Schenkeln und an der Spitze stehen, dann muß aber der Buchstabe an der Spitze in die Mitte kommen. Z. B. fig. 9. ist $\sphericalangle$ bac, oder W bac.

§. 24.

Erklärung.

Wenn sich zwey grade Linien durchschneiden, so heißen die gegenüberstehenden Winkel a und b, oder c und d **Vertikalwinkel** (fig. 11.)

§. 25.

Erklärung.

Wenn eine grade Linie auf eine andere, aber nicht ans Ende fällt, so entstehen zwey Winkel a und b, welche **Nebenwinkel** heißen (fig. 12.) Sind diese einander nicht gleich, so heißt der größere Winkel a ein **stumpfer**, der kleinere b ein **spitzer Winkel**.

§. 26.

Erklärung.

Wenn die beyden Nebenwinkel m und n einander gleich sind, so heißen sie **rechte Winkel** (fig. 13.) Weil nun das Maaß zweyer Nebenwinkel ein Halbkreis oder 180 Grade ist, so hält jeder rechte Winkel 90°, ein stumpfer hält mehr, ein spitzer weniger als 90°. Man bezeichnet den rechten Winkel durch $= R$, also ist der stumpfe $> R$, der spitze $< R$.

§. 27.

Erklärung.

Eine Linie ad (fig. 13.), welche mit einer andern bc rechte Winkel macht, steht auf dieser **senkrecht** oder **perpendiculär**. — Senkrechte Linien und rechte Winkel gehören immer

immer zusammen; daher kann man auch sagen: wenn eine Linie auf einer andern senkrecht steht, so sind die dadurch entstehenden Nebenwinkel einander gleich, oder es sind rechte Winkel. Alle rechte Winkel sind gleich.

§. 28.

Erklärung.

Die Linie ab (fig. 14.) läuft mit cd **parallel**, wenn sie von dieser allenthalben gleich weit entfernt ist.

§. 29.

Anmerkung.

Wenn zwey Linien mn und qr einer dritten op parallel sind, so sind sie untereinander selbst parallel (fig. 15.)

§. 30.

Anmerkung.

Wenn auf einer Linie ab (fig. 16.) zwey senkrechte Linien cd und ef stehen, so laufen dieselben parallel, d. i. sie werden sich weder einander nähern, noch von einander entfernen, man mag sie so lange fortziehen, als man will. — Hieraus folgt, daß aus einem Punkte ausser einer graden Linie auf diese Linie nur **ein** Perpendikel möglich ist.

§. 31.

Anmerkung.

Man hat mehrere Methoden, wie man auf dem Papier eine Linie mit einer andern parallel ziehen kann, wovon einige hier, andere weiter unten angeführt werden sollen. 1) Mit Hülfe eines **Parallel-Lineals** (fig.

(fig. 17.), welches aus zwey Linealen besteht, die durch messingene bewegliche Bändchen so aneinander gefügt sind, daß sie näher aneinander oder weiter voneinander geschoben werden können. Gesetzt, man sollte (fig. 18.) durch den Punkt c eine Linie mit a b parallel ziehen; so legt man das eine Lineal an a b, und thut das andere auf bis an den Punkt c, worauf die Linie gezogen werden kann. 2) Man kann dieses auch mit einem einfachen Lineal und einem Cirkel verrichten. Das Lineal wird an a b gelegt, der Cirkel von a b bis c aufgethan und an dem Lineal heruntergezogen, nun wird der andere Cirkelfuß durch c eine Linie zeichnen, welche mit a b parallel läuft. 3) Endlich kann man sich zu diesem Behufe auch einen rechtwinkelichten Triangel (von dem weiter unten mehr vorkommen wird) von Holz oder Messing machen lassen. Diesen legt man (fig. 19.) an a b, legt das Lineal unten dran, schiebt den Triangel fort bis c, und zieht die Linie c d.

§. 32.

Erklärung.

Eine **Figur** ist eine von Linien eingeschlossene Fläche. (Also ist ein Winkel keine Figur.) — Es kann **gradlinichte** und **krummlinichte** Figuren geben. — Es giebt auch Figuren, welche theils von graden, theils von krummen Linien eingeschlossen sind, und **gemischte** Figuren heißen können (fig. 20.)

§. 33.

Anmerkung.

Eine gradlinichte Figur muß wenigstens drey Seiten haben; denn zwey grade Linien können keinen Raum einschließen (§. 5.) Die Linien, welche eine gradlinichte Figur begrenzen, heißen die **Seitenlinien**,

diese

diese zusammen sind der Umfang der Figur (perimeter). Der dadurch begrenzte Raum ist der Flächeninhalt der Figur.

§. 34.

Erklärung.

Drey grade Linien, welche einen Raum einschließen, bilden einen Triangel oder ein Dreyeck. (Hier ist nur von ebenen Figuren die Rede. Eine andere Art von Triangeln sind die sphärischen, welche von drey krummen Linien auf einer Kugelfläche eingeschlossen werden. Diese gehören aber nicht in die ersten Gründe der Geometrie.)

Die Triangel werden eingetheilt, entweder in Ansehung ihrer Winkel, oder in Ansehung ihrer Seiten.

I. In Ansehung ihrer Winkel.

1. Hat er einen rechten und zwey spitze Winkel, so heißt er rechtwinkelicht (fig. 21.)

2. Hat er einen stumpfen und zwey spitze Winkel, so heißt er stumpfwinkelicht (fig. 22.)

3. Sind die drey Winkel spitz, so heißt er ein spitzwinkelichter Triangel (fig. 23.) (Es kann überhaupt nur ein rechter oder ein stumpfer Winkel in einem Triangel seyn, die andern beyden müssen spitz seyn. Sie können aber auch alle drey spitz seyn.)

II. In Ansehung ihrer Seiten.

1.

1. Sind die drey Seiten gleich, so heißt er geichseitig (fig. 24.)

2. Sind nur zwey Seiten gleich, so ist er gleichschenkelicht (fig. 26.)

3. Ist keine Seite der andern gleich, so ists ein ungleichseitiger Triangel (fig. 26.)

§. 35.

Anmerkung.

In einem Triangel sind zwey Seiten zusammen immer länger als die dritte. — Auch ist in jedem Triangel, dessen eine Seite verlängert wird, der äussere Winkel größer, als der innere gegenüberstehende. Z. B. fig. 27. ist in dem Triangel acb die Linie ab nach g hin verlängert, also wird W gac > W abc seyn. Denn man stelle sich vor, der äussere Winkel gac werde an ab fortgeschoben, bis er an b kommt; alsdann fällt die Linie ac ganz jenseits cb, und erhält die Lage bf. Nun ist W abf offenbar größer als W abc, weil letzterer nur ein Theil von dem erstern ist.

§. 36.

Anmerkung.

In jedem Triangel kann man immer eine Seite, welche man will, die Grundlinie nennen (z. B. ab in der 27ten Figur). Von der Spitze c, welche der Grundlinie ab gegenübersteht, kann man sich eine Linie cd, senkrecht auf ab gezogen, vorstellen, welche die Höhe des Triangels heißt. Wenn der Δ stumpfwinkelicht ist (fig. 28.), so fällt cd ausserhalb desselben, und man muß die Grundlinie ab so weit verlängern, bis sie cd erreicht.

§. 37.

Anmerkung.

In einem rechtwinkelichten Tr. abc (fig. 29.) heißt die Linie cb, welche dem rechten Winkel a gegenübersteht, die Hypotenuse. Diese ist die längste unter den drey Seiten. Die andern Seiten ab und ac, welche den spitzen Winkeln c und b gegenüberstehen, heißen Catheten.

§. 38.

Erklärung.

Die viereckichten Figuren sind entweder Parallelogrammen oder Trapezien. Ein Parallelogramm ist eine viereckichte Figur, worinn die gegenüberstehenden Seiten parallel laufen und gleich sind. Dazu gehören folgende 4 Arten:

1.) Das Quadrat (fig. 30.), welches vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel hat.

2.) Das länglichte Rechteck (Rectangulum oblongum) (fig. 31.), welches vier rechte Winkel hat, und worinn je zwey und zwey gegenüberstehende Seiten gleich sind.

3.) Die Raute (Rhombus) (fig. 32.), welche vier gleiche Seiten hat, und worinn zwey gegenüberstehende Winkel spitz und die zwey andern stumpf sind.

4.) Die länglichte Raute (Rhomboides) (fig. 33.), worinn nur die gegenüberstehenden Seiten gleich und die Winkel spitz und stumpf sind.

§. 39.

Anmerkung.

Die Aehnlichkeit und Verschiedenheit dieser 4 Figuren ist leicht aufzufinden. — Alle übrigen viereckichten Figuren heißen Trapezien. Es können darinn zwey Seiten parallel laufen, wie fig. 34., oder es läuft keine Seite mit der andern parallel, wie fig. 35.

§. 40.

Erklärung.

Alle gradlinichten Figuren, welche mehr als vier Seiten haben, heißen vielseitige oder vieleckichte Figuren (auch Polygone). Wenn darinn sowohl alle Seiten, als auch alle Winkel einander gleich sind, so heißen sie reguläre Vielecke (fig. 36.), die übrigen irreguläre (fig. 37.)

Eine gradlinichte Figur heißt, in einen Kreis beschrieben, wenn ihre Ecken alle in dem Umfange des Kreises liegen. Sie heißt, um den Kreis beschrieben, wenn alle ihre Seiten den Umfang des Kreises berühren, oder Tangenten davon sind.

§. 41.

Unter den krummlinichten Figuren ist der Kreis die merkwürdigste in der Geometrie. Daher wird bloß von dieser und sonst von keiner krummlinichten Figur in der Folge die Rede seyn.

Man kann die Eintheilung der Figuren, um der bessern Uebersicht willen, in einer Tabelle darstellen.

Figu-

Figuren sind

entweder gradlinichte, . . oder krummlinichte.

Diese sind

entweder Dreyecke,		oder Vierecke,		oder Vielecke.	
theils gleichseitige,	theils rechtwinkelichte,	Parallelogrammen.	Trapezien.	reguläre,	irreguläre.
oder gleichschenkelichte,	oder stumpfwinkelichte,	1. Quadrat.			
oder ungleichseitige.	oder spitzwinkelichte.	2. länglichtes Rechteck.			
		3. Raute.			
		4. länglichte Raute.			

§. 42.

Anmerkung.

Zum Beschlusse dieser Erklärungen von Linien und Figuren wollen wir noch den Unterschied zwischen Linien, Flächen und Körpern in der Geometrie merken. Man kann diesen Unterschied in viererley Rücksicht betrachten: 1) in Ansehung der Ausdehnung, 2) der Entstehung, 3) der Begränzung, 4) der Messung.

1) Es giebt dreyerley Ausdehnungen (oder Dimensionen), in die Länge allein, in die Länge und Breite, und in die Länge, Breite und Dicke (oder Höhe). Die Linie hat nur eine Länge, aber keine Breite und Dicke; die Fläche hat eine Länge und Breite, aber keine Dicke; der Körper hat Länge, Breite und Dicke. Die Linie hat eine, die Fläche zwey, der Körper drey Dimensionen.

2) Man kann sich vorstellen, als entstünde eine Linie durch die Bewegung eines Punktes; eine Fläche durch die Bewegung einer Linie; ein Körper durch die Bewegung einer Fläche.

3) Die Gränzen der Linie sind mathematische Punkte; die Gränzen der Fläche sind Linien; die Gränzen des Körpers sind Flächen.

Also sind Punkte keine Theile der Linie, Linien keine Theile der Fläche, Flächen keine Theile des Körpers. Man möchte noch so viele Punkte nebeneinander setzen, sie würden doch keine Linien bilden, weil sie keine Länge haben. Eben so können mehrere aneinander gelegte Linien keine Fläche bilden, weil sie keine Breite haben, und mehrere aufeinander gelegte Flächen können keinen Körper bilden, weil sie keine Dicke haben. Theile der Linien, Flächen und Körper, sie mögen noch so klein seyn, sind wieder Linien, Flächen und Körper.

4) Um also eine Linie zu messen, muß man eine andere Linie, z. B. eine Ruthe, Schuh u. dgl. nehmen; um eine Fläche zu messen, gebraucht man eine andere Fläche; um einen Körper zu messen, gebraucht man einen andern Körper als Maaß, so wie man z. B. die Größe eines Landes nach Quadratmeilen, den Inhalt eines Fasses nach Schoppen und Maaßen bestimmt. (Von den gewöhnlichen Quadrat- und Cubik-Maaßen, um die Größe der Flächen und Körper zu bestimmen, wird in der Folge noch mehr vorkommen, wo auch zugleich gelehrt werden wird, wie man damit messen soll.)

Dieses mag vorläufig genug von dem Unterschiede der Linien, Flächen und Körper seyn, um sich wenigstens eine allgemeine Uebersicht davon zu verschaffen.

Zweytes

Zweytes Kapitel.

Von der Gleichheit der Triangel.

§. 43.

Zwey grade Linien ab und cd (fig. 38.) sind einander gleich, wenn sie sich wechselsweise decken. Man muß sich nämlich vorstellen, die Linie ab sey so auf cd gelegt, daß der Endpunkt a auf c und der Endpunkt b auf d fällt. Alsdann decken sie sich, und sind einander gleich.

Zwey Winkel (fig. 39.) sind gleich, wenn sie sich decken, d. i. wenn in dem Falle, daß die Spitzen a und d aufeinander gelegt werden, der Schenkel ab in de und ac in df fällt, (wenn auch die ganzen Schenkel nicht gleich groß sind; denn es kömmt bey der Gleichheit der Winkel auf die gleich große Neigung der Schenkel an.) Alle rechte Winkel müssen sich also decken.

Zwey Triangel (fig. 40.) sind gleich, wenn sie sich wechselsweise decken, so, daß die drey Seiten des einen in die drey Seiten des andern fallen.

Zwey Figuren überhaupt sind gleich, wenn sie sich decken, (wie die Fünfecke fig. 41.)

Linien, Winkel nud Figuren müssen sich decken, wenn sie gleich sind.

Figu-

Figuren, welche sich wechselseitig decken, heißen congruent. Es giebt aber auch Figuren, welche dem Inhalt nach gleich sind, und doch verschiedene Gestalt haben: diese sind gleich groß, aber nicht congruent.

Beyspiele von congruenten Figuren sind: Zwey Kreise von gleichem Halbmesser — die beyden Hälften eines Kreises — zwey Quadrate von gleicher Grundlinie — zwey Rechtecke von gleicher Grundlinie und Höhe — zwey reguläre Polygone von gleich vielen und gleich großen Winkeln, und gleichen Seiten.

§. 44.

Lehrsatz.

Wenn in zwey Tr. abc und def (fig. 40.) eine Seite und die zwey daran liegende Winkel in einerley Ordnung gleich sind, so decken sich die ganzen Tr., oder sie sind gleich.

Beweis. Gesetzt, es sey ac = df, Wa = Wd und Wc = Wf, und man legt den ersten Tr. auf den andern; so fällt ac auf df, der Punkt a auf d, und der Punkt c auf f; also muß, weil Wa = Wd, auch ab auf de fallen, und weil Wc = Wf, so muß cb auf fe fallen, und so die ganzen Tr. sich decken.

§. 45.

Lehrsatz.

Wenn in zwey Tr. (fig. 42.) zwey Seiten und der dazwischen liegende Winkel gleich sind, so decken sie sich ebenfalls, oder sie sind gleich.

Be-

Beweis. Es sey bekannt, daß ab = de, ac = df, und Wa = Wd, und man legt den ersten Tr. auf den andern; so fällt ab auf de und ac auf df, und der Endpunkt b auf den Punkt e, so wie der Endpunkt c auf f. Also muß auch die Linie bc auf ef fallen, weil zwischen zwey Punkten nur eine grade Linie möglich ist.

Folgesätze. 1) Wenn fig. 27. cd auf ab senkrecht stehet, so wird Wcad > Wcbd, wenn ersterer näher bey dem Perpendikel cd liegt, als der letztere. Denn man mache de = da, so ist Tr. cad = Tr. ced (nach dem obigen §. 45., weil cd = cd, de = da, und die eingeschlossenen Winkel adc und edc als rechte Winkel gleich sind). Also ist Wced = Wcad. Aber Wced ist als äußerer Winkel größer, als der innere Wcbe (§. 35.) Daher ist Wcad > Wcbd.

2) Wenn in zwey Dreyecken eine Seite, und ein an der Seite anliegender, ferner ein der Seite gegenüberstehender Winkel in einerley Ordnung einander gleich sind, so decken sich die Dreyecke, z. B. es sey fig. 40. ab = cd, Wa = Wd, Wc = Wf. Man lege ab auf de, so fällt a auf d, b auf e, und Wa auf Wd, weil sie gleich sind; daher die Linie ac in die Linie df. Man denke sich nun einen Perpendikel von b auf die Grundlinie. Da nun die Wc = Wf, so müssen sie (nach dem Zusatz 1) gleichen Abstand von dem Perpendikel haben. Also fallen bc und ef ineinander, und die Triangel decken sich. Sollte f näher oder ferner als c bey dem Perpendikel liegen, so würde Wf größer oder kleiner als Wc seyn, gegen die Voraussetzung.

3)

3) Wenn in einem Tr. abc (fig. 60.) die Winkel a und b an der Grundlinie gleich sind, so ist auch ac = bc, oder der Triangel ist ein gleichschenklichter. Denn wenn man das Perpendikel cd ziehet, so entstehen rechte Winkel. Also ist Tr. adc = Tr. bdc, da ausser der gemeinschaftlichen Seite cd noch zwey Winkel in derselben Ordnung gleich sind. (Siehe den vorigen Zusatz.) Also ist auch ac = bc.

Man kann diesen Satz auch auf folgende Art erweisen. Es seyen (fig. 48.) im Tr. abc die Winkel cab und cba gleich. Nun denke man sich dasselbe Dreyeck noch einmal, oder ein gleiches adb, so daß W cab = W dab, und W cba = W dba. Nun lege man dieses umgewendet auf das Dreyeck abc, daß W dba auf W cab, und W dab auf W cba fällt, so decken beyde Dreyecke auch in dieser Lage einander. Also ist bd = ac. Es war aber nach der Voraussetzung bd = bc. Folglich ist ac = bc, oder der Tr. abc ist gleichschenkelicht.

Der von dem vorigen umgekehrte Satz läßt sich auf dieselbe Art erweisen. Er heißt: wenn in einem Tr. die beyden Seiten ac und bc gleich sind, (oder wenn der Tr. gleichschenkelicht ist), so sind auch die den Seiten gegenüberliegenden Winkel cab und cba gleich.

4) In einem Triangel stehet der größern Seite der größere Winkel gegenüber. Es sey (fig. 43.) im Tr. abc die Seite ac > bc. Man mache cm = cb. Nun ist der äußere W cmb > W cab. Aber es ist W cmb = W cbm (wie so eben erwiesen worden). Also ist W cbm > W bac, und noch vielmehr ist W cba > W bac.

Umge-

Umgekehrt steht in einem Triangel dem größern Winkel die größere Seite gegenüber. Es sey W cba > W bac, so ist ac > bc. Denn wäre ac < bc, so müßte W cba < W bac seyn; wäre ac = bc, so wäre W cba = W bac (nach dem vorigen Satze). Da nun beydes gegen die Voraussetzung ist; so bleibt nichts übrig, als daß ac > bc.

5) Von einem Punkte c ausser einer graden Linie gb (fig. 27.) ist das Perpendikel cd die kleinste Entfernung des Punktes c von der Linie gb. Es sind die W cdg und cdb gleich, beyde als rechte Winkel. Nun ist W cdg als äußerer am Tr. cdb größer wie der W cbd; daher ist auch W cdb > W cbd, folglich cb > cd. Eben so läßt sich zeigen, daß auch jede andere vom Punkte c nach der Linie gb schief gezogene Linie größer als das Perpendikel cd seyn muß. Z. B. ce > cd, weil W cdg = W cde, und W cdg > W ced, also W cde > W ced. — Eben so leicht läßt sich zeigen, daß die Linien ca und cd, welche auf beyden Seiten von dem Perpendikel cd in gleicher Entfernung liegen, gleichlang seyn müssen.

§. 46.

Lehrsatz.

Wenn in zwey Tr. (fig. 42.) die Seite ab = de, bc = ef, und W c = W f, welcher der längern von beyden Seiten gegenübersteht; so decken sich die Tr., oder sie sind gleich.

Beweis. Wenn man den Tr. abc auf den Tr. def so legt, daß bc auf ef fällt, (die sich wegen ihrer gleichen Länge decken), so

so fällt auch ca in fd, weil Wc = Wf. Da nun die Linie ba die Linie fd irgendwo schneiden muß (denn sonst gäbe es kein Dreyeck, wenn z. B. ba mit fd parallel liefe): so läßt sich darthun, daß des Wa Spitze in d fallen, das ist, daß ba die Linie ed decken muß. Denn wollte man annehmen, daß die Winkelspitze a des ersten Triangels nicht in die Winkelspitze d des andern fiele, daß sie also in einen Punkt der verlängerten Linie df fiele, der weiter oder näher als der Punkt d gegen das Perpendikel bm läge: so würde (nach den Folgesätzen des vorigen §.) im ersten Falle ba länger als ed, im andern aber kürzer seyn. Beydes ist gegen die Voraussetzung, daß ba = ed. Also muß b in e, a in d fallen, die ganzen Triangel müssen sich decken, folglich müssen Wb = We, Wa = Wd, und ac = df seyn.

§. 47.

Anmerkung.

Hier ist zu bemerken, daß wenn zwey Seiten und der Winkel, welcher der kürzern von diesen zwey Seiten gegenübersteht, in zwey Tr. gleich sind, nicht immer folgen muß, daß sich die Tr. decken. Denn gesetzt, es sey (fig. 43.) ab = de, bc = ef, und Wa = Wd (welche den kürzern Seiten bc und ef gegenüberstehen); so könnte bc zweyerley Lage haben, da bc = bm, ohne daß sich etwas in der Größe dieser Seiten und Winkel änderte. Nun ist zwar Tr. abc = Tr. def, aber Tr. amb ist nicht dem Tr. def gleich, wie schon der Anblick der Figur zeigt. Wenn also aus der Voraussetzung, daß in zwey Tr., worinn zwey Seiten und ein Winkel, der nicht zwischen ihnen liegt, gleich sind, geschlossen werden soll, daß diese Tr. sich nothwendig decken müssen; so muß (wie im §. 46.) angenommen werden, daß der

Win-

Winkel der größern von den beyden Seiten gegenübersteht.

§. 48.

Lehrsatz.

Wenn die drey Seiten eines Tr. den drey Seiten eines andern gleich sind, so decken sie sich ebenfalls.

Beweis. In der 40sten Figur sey ac = df, ab = de, und bc = ef. Man lege den ersten Tr. abc auf den andern Tr. def, so fällt ac auf df. Gesetzt nun, es sollten ab und cb nicht auf de und fe fallen; so müßten sie entweder länger oder kürzer, als diese seyn. Da sie ihnen aber gleich sind, so müssen sie in dieselbe fallen, so daß der Punkt b auf den Punkt e fällt, und die ganzen Tr. sich decken.

Anmerkung. Strenger wird dieser Satz auf folgende Art erwiesen. Es seyen (fig. 46.) in den Triangeln mno und mpo die drey Seiten gleich, nämlich mn = mp, no = op, und mo = mo. Man lege die beyden Triangel mit der Seite mo so aneinander, daß der eine diesseits, der andere jenseits dieser Linie fällt. Verbindet man die der Seite mo gegenüberstehende Winkel durch die Linie np, so können drey Fälle statt finden.

1) Der Endpunkt o der gemeinschaftlichen Linie fällt über np. Nun sind die Tr. mnp, onp gleichschenkelicht, weil mn = mp, on = op. Also ist (§. 45. 3.) Wmnp = Wmpn, und Wonp = Wopn. Zieht man gleiches von gleichem ab, so ist Wmno = Wmpo. Folglich sind in den beyden Tr. mno, mpo zwey Seiten, und der von ihnen eingeschlossene Winkel gleich, daher decken sie sich nach §. 45.

2)

2) Wenn o′ in np fällt, so ist Tr. mnp gleichschenkelicht, weswegen Wmno′ = Wmpo′, woraus wieder nach §. 45. die Gleichheit der Triangel folgt.

3) Wenn o″ unter np fällt, so sind die Tr. mnp und npo″ gleichschenkelicht, weil mn = mp, und no″ = po″. Also ist Wmnp = Wmpn, und Wnpo″ = Wpno″. Wird nun gleiches zu gleichem addirt, so ist Wmno″ = Wmpo″. Also decken sich die Triangel mno″ und mpo″ nach §. 45.

§. 49.

Aus den §§. 44. 45. 46. und 48. folgt der Hauptsatz: **Wenn in zwey Triangeln drey Stücke in einerley Ordnung gleich sind (unter welchen aber wenigstens eine Seite seyn muß), also entweder eine Seite und zwey Winkel, oder zwey Seiten und ein Winkel, oder die drey Seiten; so sind auch die übrigen Seiten und Winkel gleich, und die Triangel decken sich, haben also gleich große Flächen.** (Nur der Fall in der Anmerkung §. 47. ist ausgenommen.)

§. 50.

Anmerkung.

Aus diesem Satze werden sehr viele andere Sätze bewiesen. Zur Erläuterung will ich nur ein Beyspiel vorläufig anführen. Gesetzt, man hätte (fig. 44.) in Tr. abc und ade die Winkel o und x gemessen und gleich groß gefunden; ferner hätte man gemessen, daß ab = ae und ac = ad: so kann man daraus schließen, daß auch bc = de.

§. 51.

§. 51.

Anmerkung.

Wenn man weiß, daß die drey Winkel eines Tr. den drey Winkeln eines andern Tr. gleich sind, aber man weiß nicht, ob eine oder etliche Seiten auch gleich sind; so kann man nicht schließen, daß sich die Tr. decken müssen. Denn der eine kann viel kleiner seyn, als der andere (fig. 45.) Gesetzt, es sey W a = W d, W b = W e, W c = W f; so folgt nicht, daß die Seiten auch gleich seyn müssen. Man sagt alsdann, die Tr. sind einander **ähnlich**, wovon weiter unten mehr vorkommen wird.

§. 52.

Anmerkung.

Wenn in zwey rechtwinkelichten Tr. nur zwey Seiten, oder eine Seite und ein Winkel gleich sind; so decken sie sich. Denn die rechten Winkel sind ohnehin gleich.

§. 53.

Anmerkung.

Wenn zwey Tr. mno und mpo (fig. 46.) eine Seite mo gemeinschaftlich haben, so müssen sie sich decken, wenn nur ausserdem noch zwey Stücke darinn gleich sind. (Mit Ausnahme des Falles in dem §. 47.)

§. 54.

Lehrsatz.

Zwey gradlinichte Figuren, worinn die Seiten und Winkel nach einerley Ordnung gleich sind (fig. 47.), so, daß a = A, b = B, c = C, d = D, e = E und ab = AB,

bc = BC, cd = CD, de = De, ea = EA, decken sich wechselsweise, und sind einander gleich.

Beweis. Denn man kann jede gradlinichte Figur in Tr. zertheilen, und so von jedem Tr. besonders die Gleichheit beweisen.

§. 55.

Aufgabe.

Eine grade Linie ab in zwey gleiche Theile zu theilen (fig. 48.)

Auflösung. Setze den Cirkel mit dem einen Fuße in a, thue ihn willkührlich auf, mit dem andern Fuße beschreibe über und unter der Linie ab kleine Bogen. Hierauf setze den Cirkel in b, und beschreibe mit der vorigen Eröffnung desselben wiederum kleine Kreisbogen, welche die vorigen in den Punkten c und d durchschneiden. Lege das Lineal an die Punkte c und d, und ziehe eine Linie, welche die Linie ab in dem Punkte f in zwey gleiche Theile theilen wird, so, daß af = fb.

Beweis. Der Tr. dac = Tr. dbc (§. 48.) Denn 1) ad = bd, 2) ac = bc, 3) cd = cd (weil diese Linie beyden Tr. gemeinschaftlich ist). Also ist Wo = Wx. — Ferner ist Tr. afc = Tr. bfc, weil 1) Wo = Wx, 2) ac = bc, 3) cf = cf. Also ist auch af = bf.

§. 56.

Aufgabe.

Einen Winkel bac (fig. 49.) in zwey gleiche Theile zu theilen, so, daß Wm = Wn.

Auf-

Auflösung. Setze den Cirkel in die Winkelspitze a, thue ihn willkührlich auf, und stecke in beyden Schenkeln die Punkte b und c ab, so ist ab = ac. Setze den Cirkel in b, beschreibe einen kleinen Bogen, mit derselben Eröffnung beschreibe aus c einen Bogen, welcher den vorigen in dem Punkte d durchschneidet. Ziehe eine Linie aus a durch d nach f, diese theilt den Winkel in zwey gleiche Theile.

Beweis. Der Tr. abd = Tr. acd. Denn 1) ab = ac, 2) bd = cd. 3) ad = ad. Also decken sich die Tr., und es ist Wm = Wn.

§. 57.

Anmerkung.

Man kann auf dieselbe Art grade Linien und Winkel in 4, 8 u. s. w. gleiche Theile theilen, wenn man immer fort halbiret.

§. 58.

Aufgabe.

Aus dem Punkte c in der Linie de eine senkrechte Linie aufzurichten (fig. 50.)

Auflösung. Setze den Cirkel in c, thue ihn willkührlich auf, mache mit einer und derselben Eröffnung Durchschnitte in d und e, so, daß cd = ce. Aus d und e mache mit gleicher Eröffnung Durchschnitte in a, so ist da = ea. Nun ziehe ac, diese Linie wird senkrecht auf de stehen.

Beweis. Weil in den beyden Tr. adc und aec die drey Seiten gleich sind, so werden

den sie sich decken, und Wo = Wr. Dieses sind also rechte Winkel, und daher ac auf de senkrecht. Wenn man an dem Ende einer Linie ein Perpendikel aufrichten soll, so kann man sie, wenn es angeht, verlängern, und dann nach obiger Regel verfahren.

§. 59.

Aufgabe.

Aus einem Punkte c, welcher über einer Linie mn liegt, eine senkrechte Linie auf mn herunter zu ziehen (fig. 51.)

Auflösung. Aus c mache mit gleicher Eröffnung des Cirkels Durchschnitte in der untern Linie in den Punkten d und e. Thue den Cirkel weiter auf, und mache mit dieser Eröffnung aus d und e Durchschnitte in b. Ziehe eine Linie durch b und c bis nach a, welche auf mn senkrecht stehen wird.

Beweis. Tr. bcd = Tr. bce. Denn 1) cd = ce. 2) bd = be. 3) bc = bc. Also ist Ws = Wr. — Ferner ist Tr. bda = Tr. bea. Denn 1) bd = be, 2) ba = ba. 3) Ws = Wr. Also ist auch Wo = Wx. Dieses sind daher rechte Winkel, und es folgt, daß ba auf mn senkrecht stehen muß.

§. 60.

Anmerkung.

Man kann diese und die vorige Aufgabe auch vermittelst eines Transporteurs oder auch eines Winkelhakens (rechtwinkelichen Dreyecks von Holz oder Messing, siehe §. 31. fig. 19.) auflösen. Gesetzt, man wollte (fig. 52.) aus dem Punkte c auf die Linie ab ein

ein Perpendikel setzen; so müßte man den Winkelhaken genau mit der einen Seite an ab und mit der Spitze an c legen, und sodann ce ziehen. Wollte man aber (fig. 53) von dem Punkte c ein Perpendikel herunter fallen lassen; so müßte man den Winkelhaken an der Linie ab so lange fortschieben, bis die andere Seite desselben an c liegt, worauf die Linie cd gezogen wird.

Auf dem Felde (fig. 54.) kann man folgendermaaßen aus dem Punkte c eine senkrechte Linie auf mn ziehen. Man messe ca = cb, stecke in a und b Stäbe, spanne eine Schnur von b nach a, aber nicht fest angezogen. Die Mitte dieser Schnur bemerke mit einem Zeichen, ziehe sie sehr straff nach d hin, und bemerke den Punkt, wo die Mitte der Schnur liegt, welches d ist, von diesem ziehe eine Linie nach c. — Mit geringer Veränderung kann man mit einer Schnur auch die andere Aufgabe (§. 59.) auflösen.

Auf dem Felde kann man auch die sogenannte Kreuzscheibe (fig. 55.) gebrauchen. Dieß ist ein quadratförmig geschnittenes Brettchen, einige Finger dick, in welches zwey Schnitte ab und cd, die sich rechtwinkelicht durchkreuzen, eingesägt worden sind. (Anstatt der Kreuzschnitte kann man auch Linien, die sich rechtwinkelicht durchschneiden, ziehen, und an ihre Enden kleine spitze eiserne Stiftchen schlagen, über welche man visiren kann.) Diese viereckichte Scheibe wird auf einem Stocke befestigt. Soll man nun z. B. (fig. 56.) von einem Punkte d in einer Linie ab eine senkrechte Linie aufrichten; so stellt man den Stab in d, richtet den einen Kreuzschnitt nach den Stäben in a und b. Nach der Richtung des andern Kreuzschnittes läßt man einen Stab in c einstecken, so ist cd auf ab senkrecht, weil die Nebenwinkel bey d gleich, also rechte Winkel sind. — Sollte man aber von einem Punkte c ausserhalb der Linie ab auf diese

ein Perpendikel fällen; so setze man in c einen Stab, und gehe mit der Kreuzscheibe in der Linie ab so lange hin und her, bis man durch den einen Schnitt die Stäbe a und b, und durch den andern den Stab c erblickt. Hier stecke man den Stab d ein; alsdann ist die Linie cd senkrecht auf ab.

§. 61.

Aufgabe.

Einen Winkel zu zeichnen, der einem andern gegebenen Winkel gleich ist.

Erste Auflösung. Mit dem Transporteur. Gesetzt, man solle (fig. 57.) in der Linie ce an den Punkt d einen Winkel setzen, der dem Wa gleich ist; so messet man den Wa (§. 22.), legt den Transporteur mit der Mitte an d, und bemerkt mit einer Nadel den Punkt b, so, daß der Bogen mb so groß ist, als das Maaß des Wa. Hierauf zieht man die Linie fbd.

Zweyte Auflösung. Mit dem Cirkel. Man soll einen Wd zeichnen (fig. 58.), so groß, als der gegebene Winkel a. Setze den Cirkel in a, und beschreibe einen Bogen cb. Setze ihn in d, und beschreibe mit gleicher Eröffnung den Bogen eg. Trage die Linie cb mit dem Cirkel von e nach f, und ziehe die Linie fd, so ist Wd = Wa. Denn Tr. abc = Tr. def, weil 1) ac = da, 2) ab = df, 3) cb = ef (§. 49.)

§. 62.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen Linie ab (fig. 59.) einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben.

Auf-

Auflösung. Mache mit der Eröffnung des Cirkels von a bis b aus den Punkten a und b Durchschnitte in c, und ziehe ca und cb, welche beyde alsdann ab gleich sind.

§. 63.

Lehrsatz.

In einem gleichseitigen Tr. abc (fig. 59.) sind auch die drey Winkel gleich.

Beweis. Ziehe die Linie cd in die Mitte von ab, so ist Tr. acd = Tr. cdb, weil die drey Seiten gleich sind; also ist auch Wo = Wx. — Eben so ziehe auch die Linie be in die Mitte der Linie ca, so ist Tr. bec = Tr. bea, weil die drey Seiten gleich sind, also auch Wo = Wn. Daher sind die drey Winkel n, o, x gleich.

§. 64.

Aufgabe.

Aus zwey gegebenen Linien ab und ac (fig. 60.) einen gleichschenkelichten Triangel zu zeichnen, vorausgesetzt, daß ac größer als $\frac{1}{2}$ ab ist.

Auflösung. Setze ab als Grundlinie hin. Thue hierauf den Cirkel so weit auf, als ac lang ist, und beschreibe mit dieser Eröffnung aus a und b kleine Bogen, die sich in c durchschneiden, und ziehe ca und cb, welche gleich lang sind. Also ist der Tr. cab gleichschenkelicht.

§. 65.

Lehrsatz.

Der aus §. 45. gefolgerte Satz, daß die Wo und x an der Grundlinie eines gleich-

schenkelichten Tr. abc (fig. 60.) gleich sind, läßt sich auch auf folgende Art darthun. Ziehe aus c die Linie cd in die Mitte der Linie ab, so ist Tr. adc = Tr. bdc, weil die drey Seiten gleich sind, also ist auch Wo = Wx.

§. 66.

Aufgabe.

Aus drey gegebenen Seiten ab, ac und bc, welche nicht gleich lang sind, einen ungleichseitigen Triangel zu zeichnen (fig. 61.), vorausgesetzt, daß die beyden kürzeren zusammen größer, als die längere sind.

Auflösung. Zeichne die eine Linie ab als Grundlinie. An a setze die Linie ac, und an b die Linie bc. — Man kann aber auch die Linien in einer andern Ordnung zusammensetzen; denn aus drey gegebenen Linien läßt sich nicht mehr als ein Triangel zeichnen. Daß übrigens in einem Triangel jede zwey Seiten zusammen länger seyn müssen, als die dritte, ist für sich klar, weil sonst kein Triangel entstehen könnte.

§. 67.

Anmerkung.

Jeden Tr., dessen drey Seiten man gemessen hat, kann man auf diese Art abzeichnen oder copiren. Dieses reicht ein leichtes Mittel dar, wie man jede gradlinichte Figur, z. B. den Riß von einem Garten, Walde, Felde und dergleichen copiren kann. Denn es ist möglich, jede gradlinichte Figur in Tr. zu zertheilen, und man darf hierauf nur die Tr. einen nach dem andern in ihrer Ordnung abzeichnen.

§. 68.

§. 68.

Aufgabe.

Aus zwey gegebenen Linien ab und ac (fig. 62.) einen rechtwinkelichten Tr. zu zeichnen.

Auflösung. Setze mit Hülfe des Transporteurs oder eines Winkelhakens oder vermittelst der geometrischen Construction (§. 58.) die zwey Linien ab und ac rechtwinkelicht zusammen, darauf ziehe die Linie bc.

§. 69.

Aufgabe.

Aus zwey gegebenen Seiten ab und ac und dem dazwischen liegenden spitzen oder stumpfen Winkel a einen Tr. zu zeichnen (fig. 63.)

Auflösung. Zeichne ab als Grundlinie an a, setze den gegebenen Winkel mit dem Transporteur an, ziehe die Linie ac, und zuletzt von b nach c die Linie bc.

§. 70.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Seite ab und den beyden Winkeln a und b einen Tr. zu zeichnen (fig. 64.)

Auflösung. Zeichne ab als Grundlinie, setze mit dem Transporteur an beyde Enden die gegebene W a und b, deren Schenkel sich beyde in c durchschneiden.

§. 71.

Lehrsatz.

(Fig. 65.) Die Vertikalwinkel (§. 24.) sind gleich, also W o = W x und W m = W n.

Beweis. Zeichne aus dem Durchschneidungspunkte der Linien a b und c d einen Kreis, dieser ist das Maaß der vier Winkel o, m, x, n am Mittelpunkte, sie halten also zusammen 360°. Zwey davon, die nebeneinander liegen, halten jedesmal 180°. Also sind W o + W m = W o + W n. Wenn von diesen gleichen Summen auf beyden Seiten Gleiches abgezogen wird, so bleibt Gleiches übrig. Man ziehe daher W o ab, so ist W m = W n. Eben so ist W o + W m = W m + W x. Ziehe W m ab, so bleibt W o = W x.

Anmerkung. Die Zeichen + und = bedeuten so, wie in der Arithmetik, die Addition und Subtraction, und werden durch und und weniger ausgesprochen.

§. 72.

Lehrsatz.

Wenn zwey Linien c d und e f (fig. 66.), welche parallel laufen, von einer dritten Linie a a durchschnitten werden; so sind die Winkel x und y gleich. (Diese heißen Wechselwinkel.)

Beweis. Lasse ein Perpendikel m n auf e f fallen (§. 59.), und ein anderes r s auf c d; so ist Tr. m s r = Tr. m n r, weil ausser den rechten Winkeln bey n und s und der gemeinschaftlichen Seite m r, auch noch m n =

rs; denn sie laufen parallel und stehen zwischen zwey Parallel-Linien (so wie die Sprossen einer Leiter gleich lang sind, wenn die Leiterbalken parallel laufen. Also folgt, daß Wy = Wx (§. 28.)

§. 73.

Anmerkung.

In dieser Figur muß auch der innere Wy dem äußern Wo gleich seyn. Denn Wo = Wx, weil sie Vertikalwinkel sind (§. 71.), und Wx = Wy, als Wechselwinkel (§. 72.); also ist Wo = Wy. Denn wenn zwey Größen (wie o und y) einer dritten (wie x) gleich sind; so müssen sie untereinander selbst gleich seyn. (Zur Erläuterung führe ich ein Beyspiel von Münzsorten an. Es sind 24 Livres = 11 fl.; ferner 4 Laubthaler = 11 fl. Also 24 Livres = 4 Laubthaler.)

Daraus folgt auch, daß, wenn drey, vier und mehrere parallel laufende Linien (fig. 67.), welche sämtlich in einer Ebene liegen, von einer andern durchschnitten werden, alle Winkel a, b, c, d, e einander gleich sind, oder daß der Winkel, unter dem sie geschnitten werden, immer derselbige bleibt.

§. 74.

Lehrsatz.

Wenn zwey parallel laufende Linien cd und ef von einer dritten ab durchschnitten werden (fig. 68.), so halten die beyden innern Winkel y und r sowohl, als x und s 180 Grade. (Wenn man den rechten Winkel durch R ausdrückt, so kann man auch sagen Wy + Wr = 2R. Ferner Wx + Ws = 2R.)

Beweis. $x + r = 180°$, weil sie Nebenwinkel sind; $y = x$ als Wechselwinkel. Also $y + r = 180°$. Ferner, da $r = s$, so ist auch $x + s = 180°$.

§. 75.

Anmerkung.

Wenn aber die Linien cd und ef (fig. 69.) nicht parallel laufen, so werden die zwey Winkel y und r, welche auf der Seite liegen, wo sich die Linien einander nähern, zusammen kleiner als 180° seyn. Die andern beyden Winkel x und s werden zusammen größer, als 180° seyn.

§. 76.

Anmerkung.

Die drey Sätze in den §§. 72. 73. 74. können auch umgekehrt werden, und sind eben so richtig; man kann nämlich sagen: Wenn zwey Linien cd und ef (fig. 66 und 68.) von einer dritten Linie ab durchschnitten werden, und 1) entweder ist $y = x$, 2) oder $y = o$, 3) oder $y + r = 180°$: so folgt, daß die Linien cd und ef parallel laufen.

§. 77.

Aufgabe.

Durch den Punkt c (fig. 70.) mit der Linie ab eine Parallellinie fe zu ziehen.

Auflösung. Messe den Wx, und setze ihn entweder mit dem Transporteur oder dem bloßen Cirkel (nach dem 61ten §.) an den Punkt c, alsdann ergiebt sich die Linie fce, welche mit ab parallel seyn muß, da die Wo

und

und W x gleich sind. Oder man verlängere d c, und setze an c einen äußern Winkel, der dem innern Winkel x gleich ist. — Oder man ziehe von c ein Perpendikel auf a b, und richte auf diesem in dem Punkte c einen andern Perpendikel c e auf; alsdann ist c e mit a b parallel (§. 30.)

§. 78.

Lehrsatz.

In jedem Tr. halten die drey Winkel zusammen 180°, oder die Winkel a + b + c = 2 R. (fig. 71.)

Beweis. Ziehe durch die Spitze des Tr. die Linie m n parallel mit der Grundlinie, dann sind W a = W r und W b = W s als Wechselwinkel. Nun ist das Maaß der drey Winkel r + c + s zusammen ein Halbcirkel oder 180°. Da man a anstatt r und b anstatt s setzen kann, so sind a + c + b = 180°.

§. 79.

Anmerkung.

Wenn man daher die Größe zweyer Winkel in einem Triangel weiß, so weiß man auch die Größe des dritten. Man darf nur die Summe der beyden bekannten Winkel von 180 abziehen. Z. B. wenn (fig. 71.) a und b gemessen werden, und W a = 60°, W b = 70°; so ist ihre Summe = 130. Dieß von 180 abgezogen, ist der Rest = 50. Also W c = 50°. Also wird durch zwey Winkel zwar nicht die Größe, aber die Form des Triangels bestimmt.

§. 80.

Anmerkung.

Eben so erfährt man, wenn ein Winkel bekannt ist, die Summe der beyden übrigen. Man muß ihn nämlich von 180 abziehen. Z. B. der bekannte Winkel sey = 60°, so halten die beyden andern zusammen 120°.

§. 81.

Anmerkung.

Wenn in einem gleichschenkelichten Tr. (fig. 60.), worinn die beyden Winkel an der Grundlinie gleich sind (§. 65.), ein Winkel bekannt ist; so weiß man auch die übrigen. Z. B. es sey W a = 50°, so ist W b = 50°, und da a + b = 100°, so ist W o = 80°. — Oder es sey c = 40°, so sind W a + b = 140°, also jeder = 70°.

§. 82.

Anmerkung.

Wenn man in einem rechtwinkelichten Tr. (fig. 29.) den einen spitzen Winkel weiß, so weiß man auch den andern; denn man darf ihn nur von 90 abziehen, um die Größe des andern zu erfahren. Z. B. Es sey W b = 40°, so ist W c = 50°. Hält aber jeder 45°, so sind auch die Seiten ab und ac gleich (§. 65.), und der rechtwinkelichte Tr. ist zugleich ein gleichschenkelichter. Eben so kann man auch schließen: wenn die Schenkel ab und ac gleich sind, so hält jeder der Winkel b und c 45°.

§. 83.

Anmerkung.

Weil zwey rechte Winkel = 180°, so können keine zwey rechte, noch viel weniger zwey stumpfe Winkel in einem Tr. seyn.

§. 84.

§. 84.

Anmerkung.

Da in einem gleichseitigen Tr. (fig. 59.) die drey Winkel gleich sind (§. 63.), so muß jeder $= 60°$ seyn; denn 3mal $60 = 180$.

§. 85.

Lehrsatz.

Wenn man eine der drey Seiten eines Tr. verlängert, z. B. die Seite ab nach d hin (fig. 72.); so ist der neuentstandene äußere Winkel o gleich den innern Winkeln $m + n$ zusammen genommen, die gegenüber stehen.

Beweis. $m + n + x = 180°$. Ferner $o + x = 180°$ als Nebenwinkel. Also $m + n + x = o + x$, oder wenn auf beyden Seiten x weggelassen wird, so ist $m + n = o$. Z. B. Es sey $m = 40°$, $n = 60°$, also $x = 80°$. Da nun $o + x = 180°$, so ist $o = 100°$. aber $m + n = 40 + 60 = 100$, also $o = m + n$.

§. 86.

Erklärung.

Ein Winkel, dessen Spitze an dem Mittelpunkt eines Kreises steht, heißt Centri-Winkel. (Wir wollen ihn schlechtweg C. W. nennen.) Z. B. der Winkel abc (fig. 73.) Ein Winkel, dessen Spitze in der Peripherie eines Kreises liegt, heißt Peripherie-Winkel. (Diesen wollen wir P. W. nennen.) Z. B. der Wadc.

§. 87.

Anmerkung.

Diese Winkel können in mehreren Fällen auf einem und demselben Bogen stehen, wie fig. 73., wo sie beyde mit ihren Schenkeln auf dem Bogen ac stehen. Um die Fälle, wo dieses angeht, zu unterscheiden, wollen wir die Figur 74. betrachten. Hier steht der C. W. c auf dem Bogen de. Soll nun ein P. W. auf demselben Bogen stehen, so sind drey Fälle möglich. 1) Entweder steht seine Spitze in a oder b, so, daß sein einer Schenkel mit einem Schenkel des C. W. zusammenfällt. 2) Oder die Spitze des P. W. steht zwischen a und b, so, daß seine Schenkel die Schenkel des C. W. einschließen. 3) Oder die Spitze des P. W. steht zwischen a und d, oder b und e, so, daß ein Schenkel desselben einen Schenkel des C. W. durchschneidet. In diesen drey Fällen, wo der C. W. und P. W. auf einem Bogen stehen, kann bewiesen werden: daß der P. W. nur halb so groß, als der C. W. ist. Dieses soll in folgenden drey Lehrsätzen gezeigt werden.

§. 88.

Lehrsatz.

Erster Fall. Wenn beyde Winkel auf dem Bogen bd stehen, und der Schenkel des P. W. ad fällt in den Schenkel des C. W. cd; so ist W bcd = 2 W bad (oder W e = 2 W x) (fig. 75.)

Beweis. An dem Tr. abc ist eine Seite ac nach d hin verlängert worden, also ist der äußere W e = den beyden innern gegenüberstehenden W x + W o (§. 85.) Da nun der Tr. abc gleichschenkelicht ist, indem die Linien

bc und ac Halbmesser eines Kreises sind; so sind die Winkel o und x an der Grundlinie ab einander gleich (§. 65.) Also ist es einerley, ob man sagt: We = Wo + Wx, oder We = 2 Wx.

§. 89.

Lehrsatz.

Zweyter Fall. Wenn der Wbad (fig. 76.) mit seinen Schenkeln den Wbcd einschließt: so ist letzterer auch zweymal so groß, als ersterer.

Beweis. Ziehe eine Linie von a durch c nach e. Nun findet der vorige erste Fall hier zweymal Statt. Der C. W. o und der P. W. x stehen auf dem Bogen be, und die Seite ae fällt in ce. Also ist Wo = 2Wx. Ferner der C. W. r stehet mit dem P. W. s auf dem Bogen ed, und die Seite ae fällt in ce. Daher ist Wr = 2Ws (§. 88.) Also ist Wo + Wr = 2Wx + 2Ws, oder Wbcd = 2Wbad.

§. 90.

Lehrsatz.

Dritter Fall. Wenn die eine Seite ad (fig. 77.) des P. W. bad eine Seite bc des C. W. bcd durchschneidet, so ist auch Wbcd = 2Wbad oder Wo = 2Wx.

Beweis. Ziehe eine Linie durch a und c nach e. Nun stehen Wbae und Wbce auf einem Bogen be. Also ist (nach dem ersten Falle) Wbce = 2Wbae. Ferner stehen Wdae und Wdce auf einem Bogen de. Daher ist (wieder

(wieder nach dem ersten Falle) Wdce = 2Wdae. Also muß auch Wbcd = 2Wbad.

Man kann dieses auch um der Deutlichkeit willen folgendermaßen hinsetzen:

$$o + r = 2x + 2n. \quad (\S.\ 88.)$$
$$r = 2n \quad (\S.\ 88.)$$
$$\text{Also } o = 2x.$$

Z. B. Es sey $o + r = 120°$, so ist $x + n = 60°$. Nun sey $r = 50°$, also $n = 25°$, $o = 70°$ und $x = 35°$. Es ist also $35 + 25 = 60$.

§. 91.

Anmerkung.

Hieraus folgt, daß alle P. W., die auf einem Bogen de (fig. 74.) stehen, gleich sind. Denn jeder ist halb so groß, als der C. W. c. — Man kann auch sagen: Das Maaß eines Peripherie-Winkels ist der halbe Bogen, auf dem seine Schenkel stehen. Ist z. B. der Bogen 60°, so ist der P. W. = 30°.

§. 92.

Anmerkung.

Wenn also (fig. 78.) die Schenkel eines P. W. abc auf einem Halbkreise stehen, so ist er ein rechter Winkel, oder = 90°. — Stehen die Schenkel eines P. W. dbe auf einem Bogen, der größer, also ein Halbkreis ist, so ist er größer, als 90°, also ein stumpfer Winkel. Stehen aber die Schenkel eines P. W. fbg auf einem Bogen, der kleiner, als ein Halbkreis ist, so ist er kleiner, als 90°, also ein spitzer Winkel.

§. 93.

Aufgabe.

Ueber eine Linie ab (fig. 79.) als Hypotenuse ein rechtwinkelichtes Dreyeck zu beschreiben.

Auflösung. Theile ab in zwey gleiche Theile in c (§. 55.), beschreibe aus c einen Kreis, so kannst du eine Menge rechtwinkelichter Tr. abe, abf, abg u. s. w. zeichnen, weil die P. W. e, f, g mit ihren Schenkeln auf einem Halbkreise stehen, also rechte Winkel sind.

§. 94.

Aufgabe.

Einen Winkelhaken zu probiren, ob er genau rechtwinkelicht ist (fig. 80.)

Auflösung. Zeichne einen Kreis, lege die beyden Schenkel des Winkels an die Endpunkte des Durchmessers a und b. Wenn nun seine Spitze c genau in die Peripherie des Kreises fällt, so ist er rechtwinkelicht. Fällt aber seine Spitze innerhalb oder ausserhalb der Peripherie, so ist sein Winkel stumpf oder spitz, also ist der Winkelhaken nicht richtig.

§. 95.

Aufgabe.

An dem Ende a einer Linie ab (fig. 81.) eine senkrechte Linie aufzurichten, (ohne den Transporteur oder Winkelhaken dazu zu brauchen.)

Auflösung. Nimm willkührlich über der Linie ab einen Punkt c an, setze in diesen

Punkt den Cirkel, thue ihn auf bis a, und beschreibe einen Kreis. Dieser durchschneidet im Punkte f die Linie ab. Ziehe durch f und c einen Durchmesser bis g. Von g nach a ziehe eine Linie. Diese steht senkrecht auf ab.

Beweis. Bey a ist ein rechter Winkel, weil die Schenkel ag und af auf einem Halbkreise stehen.

§. 96.

Aufgabe.

An irgend einem Punkte a (fig. 82.) in einem Kreis eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Ziehe einen Halbmesser von c nach a hin, und setze auf a nach der vorigen Aufgabe ein Perpendikel ab. Dieses ist die Tangente. Denn eine Tangente steht immer in dem Punkte, wo sie den Kreis berührt, senkrecht auf einem Halbmesser: und also ist ca der kürzeste Abstand des Mittelpunkts c von ab, und a ist der einzige Punkt der Linie ab, welcher in den Umfang des Kreises fällt. Alle andere Punkte dieser Linie müssen ausserhalb des Kreises fallen.

§. 97.

Aufgabe.

Von einem gegebenen Punkte a (fig. 83.) ausserhalb des Kreises eine Tangente af an denselben zu ziehen.

Auflösung. Ziehe von a nach dem Mittelpunkte c eine Linie ac, auf den Punkt d, wo ac den Kreis schneidet, richte ein Perpendikel auf. Beschreibe mit ca einen Kreisbogen, der

das

das Perpendikel db in e schneidet. Ziehe ce, und nach f ziehe af, so ist af die Tangente vom Punkte a nach dem Kreise hin.

Beweis. de ist eine Tangente, also cde = 90°. Nun ist Tr. cfa = Tr. cde. Denn 1) ca = ce, 2) cf = cd, 3) der Wc ist gemeinschaftlich. Daher Wcfa = Wcde. Oder jeder ist ein rechter Winkel. Also ist af eine Tangente an f.

§. 98.

Lehrsatz.

Ein spitzer P. W. a (fig. 84.) und ein stumpfer b, welche auf einer und derselben Sehne stehen, halten zusammen 180° oder 2 rechte Winkel.

Beweis. Das Maaß des Wa ist die Hälfte des Bogens cbd, und das Maaß des Wb ist die Hälfte des Bogens cad (§. 91.) So viel also der Wa kleiner, als 90° ist, um so viel ist Wb größer.

§. 99.

Anmerkung.

Die größte Sehne im Kreise ist der Durchmesser. Alle übrigen, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, werden immer kleiner, je weiter sie sich auf beyden Seiten von demselben entfernen. Sowohl diejenigen Sehnen, welche im Halbkreise acb (fig. 85.), als die, welche im Halbkreise adb liegen, sind gleich lang, wenn sie auf beyden Seiten gleich weit von dem Durchmesser ab entfernt sind. Z. B. mn = op, qr = st, ux = yz u. s. w. (siehe unten §. 138.)

§. 100.

Anmerkung.

Je spitzer ein Winkel ist (z. B. der Woap (fig. 86.), um desto kleiner ist auch die Sehne, worauf er steht. Diese Sehnen wachsen bis an den Mittelpunkt, wo die Sehne bc ein Durchmesser wird, worauf ein rechter Winkel bac steht (§. 92.) Alsdann nehmen die Sehnen de, fg wieder ab, so wie die stumpfen P. W., welche darauf stehen, zunehmen.

§. 101.

Anmerkung.

Wenn ein stumpfer und ein spitzer P. W. zusammen 180° halten, so stehen sie 1) entweder auf einer und derselben Sehne (§. 98. fig. 84.), 2) oder die Sehnen, worauf beyde stehen, sind einander gleich (fig. 86.) z. B. Wenn Woap + Wfag = 180°, so ist op = fg. Dieses letztere wird hier nur vorläufig erinnert. Weiter unten (§. 135.) werden wir noch einmal darauf aufmerksam machen, wo bewiesen wird, daß zu gleichen Bogen im Kreise gleiche Sehnen gehören.)

§. 102.

Aufgabe.

Die Parallelogramme zu zeichnen.

1) Ein Quadrat (fig. 87.) Hier muß eine Seite ab gegeben seyn. Setze eine andere Linie ac = ab rechtwinkelicht an a. Mit der Eröffnung des Cirkels von a nach b beschreibe aus b und c kleine Bogen, welche sich in d durchschneiden, und ziehe die Linien bd und cd.

2)

2) Ein länglichtes Rechteck (fig. 88.) Hier müssen zwey Seiten ab und ac bekannt seyn. Diese werden rechtwinkelicht zusammengesetzt, und die beyden andern eben so lang gemacht, nämlich bd = ac, und cd = ab an b und c angesetzt, indem man Durchschnitte in d macht.

3) Eine Raute (fig. 89.) Hier muß eine Seite ab und der Wa gegeben seyn. Setze diesen Winkel mit dem Transporteur an a, mache ac = ab, und setze hierauf an b und c die Seiten bd und cd, beyde so lang, als ab.

4) Eine länglichte Raute (fig. 90.) Es müssen zwey Linien ab und ac und der Wa gegeben seyn. Diese Seiten werden unter dem Wa zusammengesetzt, und hierauf wird bd = ac, cd = ab gemacht.

§. 103.

Erklärung.

Wenn in einer gradlinichten Figur aus einer Ecke derselben in eine andere eine grade Linie gezogen wird, so heißt dieselbe eine Diagonal-Linie, (wie ad in der 87ten fig.) Durch solche Linien kann man die Figuren in Triangel zertheilen.

§. 104.

Anmerkung.

Im Dreyeck kann man keine Diagonal-Linie ziehen; im Viereck braucht man nur eine; im Fünfeck zwey (fig. 91.); im Sechseck drey (fig. 92.) um dieselbe in Triangel zu theilen. Ueberhaupt braucht man dazu in jedem Polygon drey Diagonal-Linien weniger, als die Figur Ecken hat.

§. 105.

Lehrsatz.

Ein Parallelogramm wird durch eine Diagonal-Linie in zwey gleiche Tr. getheilt (fig. 87 und 88.)

Beweis. Weil in einem Parallelogramm die gegenüberstehenden Seiten gleich sind, so sind in den Tr. abd und acd die drey Seiten gleich, nämlich 1) ab = cd, 2) ac = bd, 3) ad = ad. Also ist Tr. abd = Tr. acd.

Aus diesem Satze fließen einige Folgen.

Die Stücke von Parallellinien, welche zwischen zwey andern Parallellinien liegen, sind alle gleich, weil sie zwey von ihnen gegenüberstehende Seiten eines Parallelogramms sind.

Wenn ein Parallelogramm einen rechten Winkel hat, so sind die andern alle recht, und die Figur ist entweder ein Quadrat, oder länglichtes Rechteck.

Wenn in einem Vierecke (fig. 88.) die gegenüberstehenden Seiten gleich sind, so ist es nothwendig ein Parallelogramm. Denn wenn die Diagonale ad gezogen wird, so decken sich die beyden Triangel adc und adb, weil die drey Seiten gleich sind. Also ist auch W adc = W dab, ferner W cad = W bda (als Wechselwinkel), daher ist cd mit ab, und ca mit db parallel (§. 76.)

Noch eine Methode, durch einen gegebenen Punkt c, mit einer gegebenen Linie ab (fig.

(fig. 90.) eine Parallellinie zu ziehen. Man ziehe willkührlich ca, und nehme willkührlich von a entfernt auf der untersten Linie einen Punkt b an. Hierauf trage man mit dem Cirkel die Linie ac von b nach d, und die Linie ab von c nach d. Der Punkt d ist da, wo sich die kleinen Kreisbogen durchschneiden. Nun ziehe man cd und bd; diese sind mit ab und ac parallel, (wie aus dem vorigen folgt.)

§. 106.

Lehrsatz.

Zwey Parallelogrammen abcd und abef, welche gleiche Grundlinie und Höhe haben, sind auch in Ansehung ihres Flächeninhalts einander gleich (fig. 93. 94.)

Beweis. Man stelle sich vor, als seyen die Parallelogrammen (fig. 93.) aufeinander gelegt (fig. 94.) Sie sollen eine gemeinschaftliche Grundlinie ab haben, und die Höhe von beyden sey ca. (Daß zwey Parallelogrammen gleiche Höhe haben, ist in dem Falle richtig, wenn die Linie cdef mit der Grundlinie ab parallel läuft). Zuerst lasse man den Tr. abg, in welchem beyde Parallelogrammen aufeinander liegen, aus der Acht, und sehe auf die Tr. ace und bdf. Diese sind gleich; denn 1) ac = bd, 2) ae = bf, (weil sie gegenüberstehende Seiten von Parallelogrammen sind), 3) ce = df, weil cd = ab, und ab = ef, also cd = ef. Daher ist cd + de = ef + de. (Das heißt ce = df.) Also ist Tr. ace = Tr. bdf. Nun stelle man sich vor, von diesen beyden gleichen Tr. werde der gemeinschaftliche Tr. dge weggenommen, so blei-

bleiben zwey Trapezien agdc und bgef übrig. Diese müssen auch gleich seyn; denn wenn man von zwey gleichen Größen Gleiches wegnimmt, so muß Gleiches übrig bleiben. Wenn man endlich zu jedem dieser beyden gleichen Trapezien den Tr. abg zusetzt, so kommen die Parallelogrammen wieder heraus, wie sie Anfangs waren. Diese müssen also gleich seyn: denn wenn man zu zwey gleichen Größen Gleiches zusetzt, so entstehen gleiche Größen. Also abcd = abef.

§. 107.

Anmerkung.

Zur Erläuterung dient Folgendes. Gesetzt, die zwey Figuren 93 wären zwey Aecker von gleicher Güte des Bodens; so müßte man auf dem einen so viel Frucht ziehen können, als auf dem andern. Oder es seyen zwey gleich dicke Tafeln von einerley Materie, z. B. Bley, Glas, Tannenholz und dergleichen; so müßten sie auch einerley Gewicht haben. und wenn man sie mit Papier überziehen wollte, müßte man zu beyden gleich viel nehmen. (Uebrigens ist von selbst klar, daß der Umfang bey solchen Parallelogrammen von gleicher Fläche nicht gleich ist, ausser, wenn sie sich decken.) Nach diesem Satze kann man (fig. 93.) ein schiefstehendes Parallelogramm abef in ein gleich großes rechtwinkelichtes abcd verwandeln. Man mache die Grundlinien gleich, verlängere ef, und richte in a und b die Perpendikel ac und db auf.

§. 108.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm in zwey gleiche Parallelogramme zu theilen (fig 94 *).

Auf-

Auflösung. Theile ab und cd in den Punkten e und f in gleiche Theile (§. 55.) und ziehe die Linie ef. Nun ist aefc = befd (§. 106.)

§. 109.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm (fig. 95.) auf eine solche Art in zwey gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinie an einem bestimmten Punkte e anfange. (Z. B. wenn in e ein Brunnen läge, und zwey Personen wollten den Garten abcd also theilen, daß sie beyde aus ihren Gärten an den Brunnen kommen könnten, wie müßte alsdann der Zaun ef gezogen werden? — Es könnte auch bey e ein gemeinschaftlicher Eingang seyn.)

Auflösung. Messe ae, und trage diese Größe von d nach f, so daß ae = df. Hierauf ist der Punkt f bestimmt, und ef kann gezogen werden.

Beweis. Tr. bfd = Tr. aec. Denn 1) ae = fd, 2) ac = db, 3) Wa = Wd. Also ist auch ec = bf. — Ferner Tr. bfe = Tr. cef. Denn 1) ec = bf, 2) eb = cf, =. 3) ef = ef. Also ist Tr. bdf + Tr. bfe = Tr. cef + Tr. ace, das ist; Trapez. bdfe = Trapez. aefc.

§. 110.

Lehrsatz.

Jeder Tr. wie abc (fig. 96.) ist die Hälfte von einem Parallelogramm abcd, das gleiche Grundlinie und Höhe mit ihm hat.

Be-

Beweis. Mache cd = ab, und bd = ac, alsdann entstehen zwey gleiche Tr. abc und bcd, weil die drey Seiten darin gleich sind. Nun ist daher Wo = Wx, und Wm = Wn. Also laufen die gegenüberstehenden Seiten parallel, und die Figur ist ein Parallelogramm (§. 76.)

§. 111.

Lehrsatz.

Zwey Tr. abe und cdf sind in Ansehung ihrer Fläche gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und Höhen haben (fig. 97 und 98.)

Beweis. Man stelle sich vor, die beyden Tr. der 97sten Figur wären mit ihren gleich großen Grundlinien (fig. 98.) auf einander gelegt. Wenn nun ihre Spitzen e und f in einer graden Linie liegen, die mit der Grundlinie ab parallel läuft; so haben sie gleiche Höhe. Jeder dieser Tr. ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe (§. 110.) nämlich Tr. abc = $\frac{1}{2}$ abek und Tr. abf = $\frac{1}{2}$ abfg. Nun ist abek = abfg (§. 106.) also auch die Hälften dieser Parallelogramme sind gleich, Tr. abe = Tr. abf.

§. 112.

Anmerkung.

Diese Tr. sind nur in Ansehung ihrer Fläche gleich, obgleich die Seiten (ausser der Grundlinie) und die Winkel darin ungleich seyn können: also müssen sie sich auch nicht decken, wenn man sie ganz auf einander legt. Wollte man aber den einen Triangel in kleine Stücke zerschneiden; so würde man damit doch die Fläche des andern bedecken können.

§. 113.

Anmerkung.

Zwey Tr. abd und bed (fig. 99.) von gleicher Grundlinie, deren Spitzen in einem Punkt zusammenfallen (also gleiche Höhe haben) müssen in Ansehung der Fläche gleich seyn. (Dies gilt auch von 3, 4 und mehrern Triangeln.) (fig. 100.)

§. 114.

Aufgabe.

Einen Tr. acd (fig. 99.) in zwey gleiche Tr. zu theilen.

Auflösung. Theile die Grundlinie ac in zwey gleiche Theile ab und bc (§. 55.) und ziehe die Linie bd. Durch fortgesetzte Halbirungen kann man einen Triangel, welcher in 2 gleiche Theile getheilt ist, hernach in 4, 8, 16 ꝛc. gleiche Theile theilen. (Eben dieses gilt auch von dem Parallelogramm (§. 108.)

§. 115.

Aufgabe.

Einen Tr. abc (fig. 101.) in ein gleich großes Parallelogramm adec zu verwandeln.

Auflösung. Halbire die Grundlinie in d, ziehe de mit ac, und ce mit ad parallel.

Beweis. Tr. dbg = Tr. ceg. Denn 1) db = ce, 2) Wo = Wx als Vertikalwinkel, 3) Wm = Wn als Wechselwinkel.

§. 116.

Anmerkung.

Da man nun jedes schiefstehende Parallelogramm in ein gleich großes rechtwinkelichtes verwandeln kann (§. 106.); so kann jeder Tr. in ein gleich großes rechtwinkelichtes Parallelogramm verwandelt werden.

§. 117.

Anmerkung.

Man kann auch umgekehrt ein Parallelogramm in einen gleich großen Tr. verwandeln. Gesetzt, adec (fig. 101.) sollte so verwandelt werden; so müßte man die Grundlinie ad verlängern, so daß ad = db, und bc ziehen, so wäre abc der verlangte Triangel.

§. 118.

Aufgabe.

Ein Fünfeck abcde in einen gleich großen Triangel dfg zu verwandeln (fig. 102.)

Auflösung. Ziehe aus der Spitze d die Diagonallinien da und db. Mit diesen ziehe aus den Ecken e und c Parallellinien ef und cg, welche die auf beyden Seiten verlängerte Grundlinie ab in den Punkten f und g schneiden. Ziehe df und dg.

Beweis. Sowohl das Fünfeck als der Triangel bestehen aus drey Triangeln. 1) Tr. dba ist beyden Figuren gemeinschaftlich. 2) Tr. dbc = Tr. dbg, weil sie eine gemeinschaftliche Grundlinie db haben, und auch gleiche Höhen, da ihre Spitzen c und g in einer Linie liegen, die mit der Grundlinie db parallel lauft.

lauft. 3) Tr. dae = Tr. daf. Denn ihre Grundlinie da ist gemeinschaftlich, und ihre Spitzen e und f liegen in einer Linie, die mit der Grundlinie da parallel gezogen worden ist. Also sind die Tr. daf, dab, dbg = den Tr. dea, dab, dbc, oder Tr. dfg = dem Fünfeck abcde.

§. 119.

Lehrsatz.

Wenn man (fig. 103.) auf die drey Seiten eines rechtwinkelichten Tr. abc Quadrate zeichnet: so ist die Fläche des Quadrats cbfg, auf der Hypotenuse cb, so groß, als die Flächen der beyden andern Quadrate acbk, und abih zusammen genommen die auf die Catheten ac und ab gezeichnet worden sind.

Beweis. Um dieses zu beweisen, muß man zuerst aus der Spitze des rechten Winkels a eine Linie ade parallel mit bf ziehen. Dadurch wird das Quadrat bfgc in zwey längliche Rechtecke zerschnitten. Nun kann man beweisen, daß bfde dem Quadrate abhi gleich ist.

Ziehe die Linien af und ci, dadurch entstehen zwey Tr. baf und bci. Diese sind gleich. Denn 1) bf = bc als Seiten eines und desselben Quadrats, 2) ba = bi, als Seiten des Quadrats abih, 3) der stumpfe Winkel o + r = dem stumpfen Winkel o + s. Denn r und s sind rechte Winkel.

Nun ist Tr. abf = $\frac{1}{2}$ bdef, weil sie eine gemeinschaftliche Grundlinie bf und gleiche Höhe ef haben. (Denn a die Spitze des Tr. abf liegt in der Linie ade, die mit der Grund-

linie bf parallel lauft.) — Ferner ist Tr. bci $= \frac{1}{2}$ abih, weil sie eine gemeinschaftliche Grundlinie bi, und gleiche Höhe hi haben, (denn c die Spitze des Tr. bci liegt in der Linie cah, die mit der Grundlinie bi parallel lauft.)

Da nun die Tr. abf und bci gleich sind, so müssen die Vierecke bdef und abih auch gleich seyn, weil sie noch einmal so groß als die Tr. sind.

Auf eben diese Weise wird bewiesen, daß das Parallelogramm cdeg = dem Quadrat cakl, wenn man von g nach a, und von l nach b Linien ziehet, wodurch wieder gleiche Tr. lcb und gca entstehen, welche die Hälften von den genannten Vierecken sind. Da dieser Beweis sich von dem vorigen nicht unterscheidet; so wollen wir ihn dem eignen Nachdenken überlassen.

§. 120.

Anmerkung.

Dieser Satz hat in der ganzen Mathematik sehr viele Anwendung, daher heißt er magister matheseos, oder von seinem Erfinder Pythagoras der Pythagorische Lehrsatz. — Eine Anwendung davon sey Folgendes. Man soll (fig. 29.) am Ende einer Linie ab bey a ein Perpendikel aufrichten, das heißt, einen rechten Winkel cab bilden. Man mache ab = 4′ bc = 5′, ca = 3′ (auf dem Felde mit einer Meßruthe oder Schnur, auf dem Papier nach einem willkührlichen Maaßstabe). Nun ist Wcab = 90°. Denn die Summe der Quadrate von ab und ac ist gleich dem Quadrate von bc, weil $3^2 + 4^2 = 5^2$, oder $9 + 16 = 25$.

§. 121.

Aufgabe.

Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Fläche der Fläche zweyer andern Quadrate abcd und efgh zusammen genommen gleich ist (fig. 104.)

Auflösung. Setze diese zwey Quadrate mit den Seiten ab und ef so zusammen, daß bey a ein rechter Winkel entsteht. Ziehe die Hypotenuse fb, und setze darauf das Quadrat fbmn.

§. 122.

Aufgabe.

Die Summe aller Winkel in einem Vieleck (z. B. in einem Fünfeck) zu finden. Diese Aufgabe kann auf zweyerley Art aufgelöset werden.

Erste Auflösung (fig. 105.) Nimm einen Punkt c innerhalb der Figur an, und ziehe von da Linien in alle Ecken. Dadurch wird die Figur in so viele Tr. zertheilt, als sie Ecken hat. Die 3 Winkel jedes Tr. halten zusammen 180° (§. 78.) Daher multiplicire 180 mit der Zahl der Ecken (oder der Seiten) der Figur. Von dem Producte müssen aber 360 abgezogen werden: denn die Winkel, die um den Punkt c stehen, halten zusammen 360°. Z. B. im Fünfeck. Fünfmal 180 = 900. Davon 360 abgezogen, bleiben für die Summe aller Winkel im Fünfeck, es mag regulär oder irregulär seyn, 540°.— Auf diese Art findet man im Sechseck die Summe aller Winkel = 720°; im Siebeneck = 900° u. s. w.

Zweyte Auflösung. (fig. 106.) Man kann auch die Figur durch Diagonallinien in Tr. zertheilen, so bekommt man jedesmal 2 Tr. weniger, als die Figur Seiten hat. Weil nun

in jedem Tr. die 3 Winkel = 180°: so muß man 180 mit einer Zahl multipliciren, die um 2 geringer ist, als die Zahl der Seiten der Figur. Z. B. im Fünfeck, 3 mal 180 = 540°; im Sechseck, 4 mal 180 = 720° u. s. w.

Anmerkung.

Die Ursache, warum 2 Tr. weniger entstehen, als Umfangslinien vorhanden sind, liegt darin, weil 2 Tr. zu ihren Grenzen zwey Umfangslinien und eine Diagonale haben müssen.

§. 123.
Erklärung.

Wenn man eine grade Linie ab (fig. 107.) mehrmals in einem Kreise als Sehne herumtragen kann, so daß der Endpunkt der letzten in den Anfangspunkt der ersten fällt, so ist der Kreis in mehrere gleiche Theile getheilt. Da alle Triangel agb, bgc u. s. w. wegen der Gleichheit der Seiten sich decken, so folgt:

1) daß die Centriwinkel bey g alle gleich sind.

2) Daß die Polygonwinkel eab, abc u. s. w. (deren die Figur so viele hat, als Seiten am Umfange) alle gleich sind. Denn Wgea = Wgab, und Wdeg = Wgae, also ist Wdea = Weab. Eben so bey den übrigen.

3) Daß die in dem Kreise beschriebene Figur ein reguläres Polygon ist.

4) Daß, wenn jede Umfangslinie halbirt wird, man ein Polygon von noch einmal so vielen Seiten zeichnen kann.

§. 124.
Aufgabe.

In einem regulären Vieleck die Größe eines Centriwinkels zu finden.

Auf-

Auflösung. Dividire 360 mit der Zahl der Seiten des Vielecks (§. 113.) Z. B. 360 mit 5 dividirt, giebt 72 als C. W. des regulären Fünfecks — 360 mit 6 dividirt, giebt 60° als C. W. des regulären Sechsecks u. s. w.

§. 125.

Aufgabe.

In einem regulären Vieleck die Größe des Polygon-Winkels zu finden.

Auflösung. Suche nach §. 122. die Summe aller Winkel, und dividire diese Zahl mit der Zahl der Seiten. Z. B. im Fünfeck, 540 dividirt durch 5 = 108°; im Sechseck, 720 dividirt durch 6 = 120° u. s. w.

§. 126.

Man kann über die regulären Vielecke eine Tabelle entwerfen, worin 1) die Summe aller Winkel, 2) die Größe des Centriwinkels, 3) die Größe des Polygonwinkels steht. Zur Probe diene folgende Tabelle bis auf 12 Eck.

Seiten des regulären Vielecks.	Summe aller Winkel.	Größe des C. W.	Größe des P. W.
5	540°	72°	108°
6	720	60	120
7	900	$51\frac{3}{7}$	$128\frac{4}{7}$
8	1080	45	135
9	1260	40	140
10	1440	36	144
11	1620	$32\frac{8}{11}$	$147\frac{3}{11}$
12	1800	30	150

§. 127.

§. 127.

Aufgabe.

Ein reguläres Vieleck in einen Kreis zu zeichnen (fig. 107.)

Auflösung. Suche die Größe des Centriwinkels (§. 124.), setze denselben mit dem Transporteur an den Mittelpunkt, alsdann ziehe die Sehne ab, und trage dieselbe im Kreise herum. Z. B. im regul. Fünfeck ist der C. W. = 72°. Dieser wird an den radius ga angesetzt, und gb gezogen, worauf sich die Größe der Sehne ab, als der Seite des regulären Fünfecks ergiebt. — Im Achteck ist der C. W. = 45°. Wenn man diesen an den Mittelpunkt des Kreises (fig. 108.) ansetzt, so erhält man die Seite des regulären Achtecks, welche in der Peripherie des Kreises herumgetragen wird.

§. 128.

Lehrsatz.

Die Seite eines regulären Sechsecks ab (fig. 109.) ist dem Halbmesser ac des Kreises gleich, worin das Sechseck gezeichnet worden ist.

Beweis. In dem Tr. abc ist Wo = 60° als Centriwinkel vom Sechseck und die Wr + Ws = 120° (§. 78.) Da nun bc = ac, als Halbmesser eines Kreises, so ist auch Wr = Ws (§. 65.) Also ist Wr = 60°, und auch Ws = 60°, oder die drey Winkel sind gleich. Daher müssen auch die drey Seiten ab, bc, ac gleich seyn (§. 63.)

§. 129.

Anmerkung.

Es ist also leicht, in einem Kreise ein reguläres Sechseck zu zeichnen, indem man nur den Halbmesser sechsmal darin herumtragen darf.

§. 130.

Anmerkung.

Wenn man in einem Kreis ein reguläres oder gleichseitiges Dreyeck zeichnen will, so beschreibt man zuerst ein reguläres Sechseck, und ziehet hernach drey Diagonallinien durch den ersten, dritten und fünften Eckpunkt.

§. 131.

Anmerkung.

Will man in einem Kreis ein reguläres Viereck oder ein Quadrat zeichnen; so ziehe man (fig. 110.) zwey Durchmesser ab und cd senkrecht auf einander, und verbinde ihre Endpunkte durch grade Linien.

§. 132.

Aufgabe.

Auf eine gegebene Linie ab (fig. 111.) ein reguläres Vieleck, z. B. ein Fünfeck zu zeichnen.

Auflösung. Suche den halben Polygonwinkel des Fünfecks, welcher = 54° ist (§. 125.) und setze ihn bey a und b mit dem Transporteur an, so durchschneiden sich die Linien bey c. Setze den Cirkel in c, thue ihn auf bis a, und zeichne einen Kreis. In diesen trage die Linie ab herum.

§. 133.

Aufgabe.

Ein Vieleck abzuzeichnen, dessen Umfangslinien und drey Diagonallinien weniger als Umfangslinien gemessen worden sind (fig. 112.)

Auflösung. Da die ganze Figur in Triangel zertheilt worden ist, von deren jedem die drey Seiten bekannt sind: so kann man jeden Triangel besonders abzeichnen, wie im §. 66. gelehrt worden ist.

§. 134.

Lehrsatz.

Wenn in einem Kreise zwey Sehnen ab und bc (fig. 113.) gleich sind; so sind auch die dazu gehörigen Bogen gleich.

Beweis. Ziehe die Halbmesser da, db, dc. Nun ist Tr. abd = Tr. bcd, weil die drey Seiten gleich sind, also ist auch Wo = Wx. Daher sind die Maase dieser Winkel, nämlich die Bogen ab und bc auch gleich.

§. 135.

Anmerkung.

Man kann auch umgekehrt sagen: wenn die Bogen gleich sind, so sind auch die dazu gehörigen Sehnen gleich. Denn alsdann ist wieder Tr. abd = Tr. bcd, weil 1) da = dc, 2) db = db, 3) Wo = Wx. Also ist auch ab = bc.

§. 136.

Lehrsatz.

Wenn aus dem Mittelpunkte eines Kreises eine senkrechte Linie auf eine Sehne ab fällt,

fällt, so wird diese in zwey gleiche Theile getheilt (fig. 114.)

Beweis. Tr. cae = Tr. cbe. Denn 1) ca = cb, 2) ce = ce, 3) Wo = Wx. Also ae = eb (§. 22.)

§. 137.

Anmerkung.

Weil nun auch folgt, daß Wm = Wn, so ist der Bogen ad = dem Bogen db. Also theile die Linie cd, welche aus dem Mittelpunkt senkrecht auf eine Sehne fällt, sowohl die Sehne, als auch den dazu gehörigen Bogen in zwey gleiche Theile.

§. 138.

Lehrsatz.

Wenn zwey Sehnen de und ab gleich weit von dem Mittelpunkte c abstehen, so sind sie gleich (fig. 115.)

Beweis. Ziehe die senkrechte Linien cf und cg. Nun ist Tr. cdf = Tr. cag, denn 1) cd = ca, 2) cf = cg, 3) Wcfd = Wcga, (da sie rechte Winkel sind), also df = ag. Aber df = $\frac{1}{2}$ de und ag = $\frac{1}{2}$ ab. (§. 136.) Daher ist de = ab.

§. 139.

Lehrsatz.

Wenn aus b, der Mitte der Sehne ad (fig. 116.) eine senkrechte Linie gezogen wird; so gehet dieselbe durch den Mittelpunkt des Kreises c, und theilt ihn also in zwey gleiche Theile.

Beweis. Tr. abf = Tr. dbf, denn 1) ab = bd, 2) bf ist gemeinschaftlich, 3) bey b sind rechte Winkel. Also ist af = df, und daher auch der Bogen af = dem Bogen df (§. 134.) Ferner Tr. abe = Tr. dbe, aus ähnlichen Gründen. Daher auch der Bogen ae = Bogen de. Also müssen die Bogen fa + ea gleich seyn den Bogen fd + de. Die Bogen fae und fde sind Halbkreise, und die Linie ef geht als Durchmesser durch den Mittelpunkt.

§. 140.

Aufgabe.

In einem gegebenen Kreise den Mittelpunkt zu suchen.

Erste Auflösung. (fig. 116.) Ziehe eine Sehne ad, durch ihre Mitte ziehe senkrecht die Linie ef, und halbire sie in c, so ist c der Mittelpunkt.

Zweyte Auflösung. (fig. 117.) Ziehe zwey Sehnen ab, bd, aus ihren Mitten ziehe senkrechte Linien fg, hi. Diese müssen beyde durch den Mittelpunkt gehen; wo sie sich also durchschneiden, ist derselbe.

§. 141.

Aufgabe.

(Fig. 117.) Durch drey gegebene Punkte a, b, d, welche nicht in einer graden Linie liegen, einen Kreis zu ziehen.

Auflösung. Ziehe die Linien ab und bd, und suche nach der zweyten Art des vorigen §. den Mittelpunkt e, woraus der Kreis beschrieben

ben werden kann. Also kann man um einen jeden Tr. einen Kreis zeichnen, der durch seine drey Spitzen geht.

§. 142.

Anmerkung.

Durch zwey gegebene Punkte kann man eine große Menge Kreise ziehen. Durch mehr als drey Punkte kann man nur in dem Falle einen Kreis ziehen, wenn ihre Lage und Entfernung so abgemessen ist, daß sie grade in die Peripherie eines Kreises fallen müssen. Aber durch drey Punkte, (die nicht in einer graden Linie liegen,) kann man immer einen Kreis ziehen, und zwar nur einen einzigen.

Also kann man um jeden Triangel einen Kreis legen, so daß die drey Spitzen des erstern in den Umfang des leztern fallen, und also 1) die Winkel des Triangels Peripheriewinkel, und 2) seine Seiten Sehnen des Kreises sind.

§. 143.

Aufgabe.

Eine grade Linie ab (fig. 118.) in gleiche Theile zu theilen, (z. B. in fünf gleiche Theile.)

Auflösung. Ziehe unter einem willkührlichen Winkel eine Linie bc an b. Trage auf bc von b fünf gleiche Theile von willkührlicher Länge, so wird sich finden, wo der Endpunkt c liegt. Ziehe die Linie ca, und mit dieser parallel ziehe durch die Theilungspunkte u, v, w, x Linien up, vo, wn, xm. Nun sind die Theile am, mn, no, op, pb einander gleich.

Beweis. Ziehe die Linien mr, ns parallel mit cb. Nun ist Tr. amr = Tr. mns, weil

weil 1) rm = sn (§. 38.) 2) Wram = Wsmn, 3) Wrma = Wsnm (§. 73.) Also am = mn. Eben so beweißt man die Gleichheit der übrigen Stücke no, op, pb.

§. 144.

Aufgabe.

Einen Triangel (fig. 119.) in gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Theile nach dem vorigen §. die Grundlinie ab in so viele gleiche Theile, als verlangt werden. Von den Theilungspunkten ziehe Linien nach der Spitze c. Nun sind die Triangel gleich, weil sie gleiche Grundlinien und Höhe haben.

§. 145.

Anmerkung.

Man kann auf dieselbe Art ein Trapezium (fig. 120.) in gleiche Theile theilen, wenn zwey Linien desselben parallel laufen. Diese werden zuerst getheilt. — Die Figur 121 zeigt, wie ein Parallelogramm in eine verlangte Zahl gleicher Parallelogramme getheilt werden kann, wenn man zuerst die Grundlinie in so viele gleiche Theile theilt, als verlangt werden.

Drittes

Drittes Kapitel.

Von der Ausmessung der Flächen.

§. 146.

Um Flächen auszumessen, muß man erst wissen, wie man grade Linien messet. Auf dem Papier braucht man dazu einen kleinen Maasstab von Holz oder Messing und dergleichen von willkührlicher Länge, der in Ruthen, Schuhe und Zolle eingetheilt ist. Der bequemste Maasstab ist der tausendtheilige, welcher 10 Ruthen, oder 100 Schuhe, odrr 1000 Zolle enthält. Wir wollen ihn weiter unten §. 186. genauer beschreiben, wo sein Gebrauch gelehrt werden soll.

Wenn eine grade Linie auf dem Felde gemessen werden soll, so muß sie erst durch Stäbe bezeichnet werden. Zuerst werden an die beyden Enden der Linie Stäbe senkrecht eingesteckt, welche 4 bis 5 Fuß lang, und unten mit spitzen Eisen beschlagen sind, und Meßstäbe genennt werden. Hierauf läßt man dazwischen in der Entfernung von 100 bis 200 Schritten noch mehrere Meßstäbe einstecken. Damit diese alle in eine grade Linie zu stehen kommen, so stellt sich eine Person von der Gesellschaft 5 bis 6 Schrittr hinter deu einen Stab, der am Ende der Linie stehet, und visiret nach dem andern Ende hin. Ein anderer Gehülfe stellt sich mit einem Stabe eine

Strecke davon, und hält denselben senkrecht schwebend über der Erde. Der erste Gehülfe muß ihm durch Zeichen zu verstehen geben, ob er seinen Stab weiter zur Rechten oder zur Linken rücken soll, bis sich die Stäbe decken. Alsdann wird er senkrecht eingesteckt. Eben so verfährt man mit den folgenden Stäben.

Hierauf wird die Linie mit einer Meßstange, eine Ruthe lang, die in Schuhe eingetheilt ist, gemessen. Am besten ists, wenn man von einem Stabe zum andern eine Schnur spannet, und daran die Ruthe legt.

Wenn die zu messende Linie lang ist: so gebraucht man dazu eine Meßkette, die 5 bis 10 Ruthen lang ist. Jedes Glied derselben ist einen Schuh lang, und die Glieder hängen mit kleinen Ringen aneinander. Am Ende von 10 Schuhen oder einer Ruthe ist ein größerer Ring angebracht. Durch die Ringe an beyden Enden der Meßkette werden Stäbe gesteckt. Zwey Gehülfen tragen die Kette, und legen sie an die Linie. Ein dritter visiret nach der oben beschriebenen Art, und sieht zu, daß die Stäbe jedesmal, wenn die Kette gelegt wird, grade in die zu messende Linie fallen. Dieses setzt man fort, bis die ganze Linie gemessen ist, und zählet, wie oft man die Meßkette angelegt hat.

Wenn die Linien an Bergen auf und ablaufen: so müssen sie doch so gemessen werden, als wenn sie horizontal oder auf einem ebenen Boden fortliefen. Hier ist eine Meßstange besser als eine Kette zu brauchen, weil man sie mit einer Setzwage leicht horizontal legen kann. An das Ende wird jedesmal ein Stab senkrecht ein-

eingesteckt, und hernach die Meßstange da wieder angelegt, wo der Stab gestanden hat (fig. 122.) Man erhält dadurch statt der Länge der Bergaufwärtsgehenden Linie ac die horizontale Linie ab. Hierdurch wird man in den Stand gesetzt, alle Flächen auf der Erde, sie mögen noch so uneben seyn, also auszurechnen, als wenn sie lauter ebene Flächen wären.

§. 147.

Erklärung.

Eine quadratförmige Fläche, welche eine Ruthe, Schuh oder Zoll lang und breit ist, heißet eine Quadratruthe, Quadratschuh, Quadratzoll. — Nach solchen Maaßen muß man die Größe der Flächen bestimmen. Wenn man z. B. fragt, wie groß ein Acker sey? so will man wissen, wie viel Quadr. Ruthen oder Quadr. Schuhe er halte. — Die Größe ganzer Landschaften wird auch nach Quadratmeilen bestimmt, welches Quadrate sind, die eine Meile lang und breit sind. Hierzu gehören aber noch mancherley Kenntnisse, die in den ersten Anfangsgründen der Geometrie nicht vorkommen können.

§. 148.

Anmerkung.

Wenn man sich von der Ausmessung der Flächen einen deutlichen Begriff machen will; so muß man bedenken, daß es hier nicht darum zu thun ist, blos die Länge der Umfangslinien der Fläche zu wissen, sondern den Inhalt der Fläche selbst. Wer z. B. die Größe seines Ackers wissen will, um einen Ueberschlag zu machen, wie viele Frucht er ohngefähr darauf ziehen

hen könne, ist dazu nicht im Stande, wenn er blos den Umfang des Ackers weiß. Man müßte also ein Maaß erfinden, das die Größe der Fläche selbst angiebt; und dieses Maaß müßte selbst eine Fläche seyn. Denn jedes Ding, das gemessen werden soll, muß ein Maaß haben, das mit ihm von einerley Art ist. Daher braucht man zur Messung einer Linie eine kleinere Linie, z. B. eine Ruthe, Schuh, oder Zoll. Gesetzt, man wollte nun wissen, wie groß die Fläche eines Tisches wäre, und schnitte sich so viele Quadratzolle von Papier, daß man den ganzen Tisch damit belegen könnte: so brauchte man diese hernach nur zu zählen. Dieses ist aber zu weitläuftig, und auch öfters nicht thunlich. Daher hat man einen kürzern Weg ausgedacht, die Menge der Q. Ruthen, Q. Schuhe u. s. w. zu finden, die in einer Fläche enthalten sind. Dies soll in den folgenden Aufgaben gelehrt werden.

§. 149.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines vollkommenen Quadrats zu finden. (fig. 123.)

Auflösung. Messe eine Seite ab, und multiplicire sie mit sich selbst. Z. B. Es sey ab = 4′ so ist das Quadrat abcd = 16 Quadrat-Schuhe.

Beweis. Denn da ab = ca, so kann man sich vorstellen, als wenn das ganze Quadrat in Streifen getheilt wäre, deren jeder einen Schuh breit ist, und jeder Streifen muß so viele Quadratschuhe enthalten, als es Streifen überhaupt sind. Hier sind z. B. im untersten Streifen abmn vier Quadratschuhe, und da es auch vier Streifen seyn müssen, (weil die

die Figur sonst kein Quadrat wäre): so ist der Inhalt 4 mal 4, oder 16 Quadratschuhe.

§. 150.

Anmerkung.

Weil bey dem Längenmaaße eine geometrische Ruthe = 10 Schuh, 1 Schuh = 10 Zoll, 1 Zoll = 10 Linien, so muß bey dem Flächenmaaße 1 Q. Ruthe = 100 Q. Schuhe, 1 Q. Schuh = 100 Q. Zolle, 1 Q. Zoll = 100 Q. Linien seyn. — Z. B. fig. 124. sey ab = ac = 1 Ruthe, so ist der Flächeninhalt = 100 Q. Schuhe.

§. 151.

Anmerkung.

Man kann also eine Zahl von Q. Ruthen leicht in Q. Schuhe verwandeln, wenn man diese Zahl mit 100 multipliciret, das ist, wenn man zwey Nullen anhängt. Hängt man an die Zahl der Q. Schuhe noch zwey Nullen, so hat man die Q. Zolle. Z. B. 12 Q. Ruthen sind = 1200 Q. Schuhe, diese sind = 120000 Q. Zolle. — Auf umgekehrte Art kann man eine Zahl von Q. Zollen in Q. Schuhe verwandeln, wenn man sie mit 100 dividirt, oder von der Rechten zur Linken zwey Ziffern für die Q. Zolle abschneidet: Z. B. 2876 Q. Zolle sind 28′76″. — Ist die Zahl so groß, daß man noch weiter zwey Ziffern abschneiden kann: so bekommt man die Q. Ruthen. Z. B. 267864 Q. Zolle sind 26078′64″ im Quadratmaaße. — Wenn man Quadratmaaße mit einander vergleichen will, so muß man ihre Seiten wissen, und dann die Quadrate davon nehmen: z. B. wenn eine geometrische Ruthe 10 Schuhe, und eine Rheinländische Ruthe 12 eben so lange Schuhe hält; so verhält sich die geom. Q. Ruthe zur Rheinländischen wie 100 zu 144.

Wenn

Wenn man Rheinländisches Maaß hat, und will die Q. R. in Q. S. verwandeln; so muß man ihre Anzahl mit 144 multipliciren. Umgekehrt muß man mit dieser Zahl dividiren. — Hält aber eine Ruthe 16 Schuhe, also die Q. R. = 256 Q. S., so muß man bey der Verwandlung von Q. R. in Q. S. und umgekehrt, mit 256 multipliciren oder dividiren.

§. 152.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines länglichten Rechtecks zu finden (fig. 125.)

Auflösung. Messe die Länge und Breite, und multiplicire sie mit einander. Z. B. ab = 7'', ac = 3'' so ist der Flächeninhalt von abcd = 21 Q. Zolle.

Beweis. Denn die Breite zeigt an, wie viel Streifen, und die Länge wie viel Q. Zolle in jedem Streifen sind. Wenn man den Ausdruck: eine Länge mit der Breite (oder eine Grundlinie mit der Höhe) multipliciren, gebraucht; so darf man ihn nicht mißverstehen. Denn es können nur Zahlen, und keine Linien mit einander multiplicirt werden. Daher heißt ein Produkt aus der Grundlinie in die Höhe so viel, als das Produkt aus der Anzahl gleich großer Theile, die in der Grundlinie und der Höhe enthalten sind.

§. 153.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines schiefstehenden Parallelogramms (einer Raute oder länglichten Raute zu finden) (fig. 126.)

Auf-

Auflösung. Lasse von der obersten Linie eine senkrechte Linie auf die Grundlinie fallen. Diese ist die Höhe des Parallelogramms. Messe sowohl die Höhe als die Grundlinie, und multiplicire sie mit einander. Z. B. ab = 12′, cd = 10′, so ist abef = 120 Q. Schuhe.

Der Beweis fließt aus dem §. 106., daß ein schiefwinkelichtes und rechtwinkelichtes Parallelogramm in Ansehung der Fläche gleich sind, wenn sie gleiche Grundlinie und Höhe haben. Wenn die Figur so schief stehet, daß das Perpendikel ausserhalb derselben fällt, so muß man es auf die verlängerte Grundlinie ziehen.

§. 154.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Triangels zu finden.

Auflösung. Multiplicire die Höhe und Grundlinie mit einander, und dividire das Produkt durch zwey. Z. B. in fig. 27 sey ab = 8′, cd = 6′, so ist Tr. abc = $4\frac{8}{2}$ = 24 Quad. Schuhe.

Der Beweis fließet aus dem §. 110, daß jeder Tr. die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe ist.

§. 155.

Anmerkung.

Bey einem stumpfwinkelichten Tr. wie fig. 28. fällt die Höhe ausserhalb desselben, und man muß die Grundlinie so weit verlängern, bis die senkrechte Linie cd sie berühret.

§. 156.

Anmerkung.

Man kann auch, um den Inhalt eines Tr. zu finden, die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die Höhe mit der halben Grundlinie multipliciren. Z. B.

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2}\,ab & = 4 \\ cd & = 6 \\ \hline & 24 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} ab & = 8 \\ \frac{1}{2}\,cd & = 3 \\ \hline & 24 \end{array}$$

Wenn eines Parallelogramms oder Triangels Inhalt bekannt ist, und man dividirt ihn mit der Grundlinie, so findet man die Höhe (bey dem Triangel die halbe Höhe); dividirt man den Inhalt mit der Höhe, so findet man die Grundlinie, (bey dem Triangel die halbe Grundlinie).

§. 157.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Trapeziums zu finden, in welchem zwey Linien ab und dc parallel laufen. (fig. 127.)

Auflösung. Messe die Linien ab und cd, addire die Zahlen, nimm von der Summe die Hälfte und multiplicire sie mit der Höhe ca. Z. B. ba = 10′, cd = 8′, also ab + cd = 18″ die Hälfte ist = 9. Es sey ca = 4′, so ist der Inhalt von abcd = 4. 9 = 36 Q. Schuhe.

Beweis. Ziehe de parallel mit ca. Theile eb in zwey gleiche Theile in f. Ziehe fg parallel mit de, und dg parallel mit ab, so entstehet ein Parallelogramm afgc, dessen Grundlinie af das Mittel zwischen den Linien cd und ab ist, weil ef = fb. Nun muß bewiesen

wiesen werden, daß das Parallelogramm afgc = dem Trapezium abcd. Dies folgt daraus, weil Tr. fbn = Tr. dgn. Denn 1) Wo = Wx als Vertikalwinkel, 2) Wr = Ws als Wechselwinkel, 3) dg = fb. Also ist dem Parallelogramm afgd ein so großer Tr. dng zugesetzt worden, als der Tr. fbn ist, der von dem Trapezium abgeschnitten worden ist. Daher ist afgc = abdc.

§. 158.

Aufgabe.

Ein Trapezium auszurechnen, worin keine Seite mit der andern parallel lauft. (fig. 128.)

Auflösung. Theile die Figur durch die Diagonallinie ae in 2 Tr., und rechne jeden besonders aus. Die Produkte addire zuletzt.

Z. B.	
ae = 20	ae = 20
$\frac{1}{2}$ bn = 5	$\frac{1}{2}$ dm = 6
Tr. abe = 100 Q. S.	Tr. ade = 120 Q. S.

Tr. abe = 100
Tr. ade = 120

Trapez. abcd = 220 Q. S.

§. 159.

Anmerkung.

Man erspart etwas Mühe in der Messung der Linien, wenn man eine Grundlinie ae für beyde Tr. annimmt.

§. 160.

Aufgabe.

Die Fläche eines regulären Vielecks auszurechnen (fig. 129.)

Auf-

Auflösung. Ziehe aus dem Mittelpunkte Linien in die Ecken, wodurch so viele gleiche Triangel entstehen, als das Vieleck Seiten hat. Daher rechne nur einen Tr. aus, und multiplicire die Zahl, die dessen Fläche anzeigt, mit der Zahl der Seiten. Z. B. ab = 8′ ½ cd = 3′. Inhalt des Tr. abc = 24 Q. Schuhe. Inhalt der ganzen Figur = 6. 24 = 144 Q. Sch.

§. 161.

Aufgabe.

Die Fläche eines irregulären Vielecks (fig. 112.) auszurechnen.

Auflösung. Theile dasselbe durch Diagonallinien in Tr., rechne jeden besonders aus, und addire dieselben. — Eine andere Auflösung ist folgende. Man messe durch die ganze Figur der Länge nach eine grade Linie, und lasse von allen Eckpunkten Perpendikel darauf fallen, die in der Breite durch die ganze Figur gezogen werden. Hierdurch wird die Figur in solche Trapezien getheilt, deren Berechnung §. 157. vorkommt. (Auf dem Felde kann man sich der Kreuzscheibe §. 60. bedienen, mit welcher man aus der nach der Länge gezogenen Linie nach den in die Ecken der Figur gestellten Stäben visirt.)

§. 162.

Aufgabe.

Ein reguläres Vieleck in einen gleich großen Tr. zu verwandeln (fig. 130. n. 1 und 2.)

Auflösung. Zeichne einen rechtwinkelichten Tr., dessen Grundlinie al so groß ist, als

als die Linien AB, BC, CD, DE, EA zusammen genommen, die das reguläre Vieleck einschließen, und dessen Höhe ac gleich ist der Höhe ox von einem der Tr. des Vielecks. Alsdann ist Tr. alc = ABCDE.

Beweis. Man stelle sich vor, als seyen die Tr. des Vielecks, ABo, BCo, u. s. w. (welche alle gleich groß sind,) neben einander auf die Linie ab gesetzt. Weil nun ac = ox: so ist ac so hoch, als alle diese Tr. abd, bef u. s. w. Zertheile durch die Linien cb, ce, cg, ci den großen Tr. in lauter schiefstehende Tr. Diese schiefstehende Tr. sind den gradstehenden gleich, weil sie gleiche Grundlinien und Höhe mit ihnen haben. Es ist nämlich Tr. abc = Tr. abd, Tr. bec = Tr. bef, Tr. egc = Tr. egh, Tr. gic, = Tr. gik, Tr. ilc = Tr. ilm. Also ist Tr. alc = dem regulären Vieleck ABCDE.

§. 163.

Wenn man ein reguläres Vieleck von sehr vielen Seiten (fig. 131.) in einen Kreis zeichnet: so werden die Tr. des Vielecks sehr schmal, und ihre Grundlinien sehr klein werden. Je größer die Anzahl der Seiten eines solchen Vielecks ist, desto näher kommt sein Umfang dem Umfange, und sein Flächeninhalt dem Flächeninhalte des Kreises, in welchen es beschrieben worden ist. Stellte man sich nun ein solches Vieleck von unzählig vielen Seiten vor: so würde sein Umfang dem Umfange des Kreises gleich seyn. Ferner würde auch der Flächeninhalt von beyden gleich seyn.

Da man nun nach dem vorigen §. jedes reguläre Vieleck in einen gleich großen Triangel verwandeln kann, wenn man die Grund-

linie desselben, und seine Höhe gleich macht dem Umfange des Vielecks und der Höhe eines seiner Tr.; so kann man auf ähnliche Art auch einen jeden Kreis in einen gleich großen Tr. verwandeln. Denn der Kreis ist als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten anzusehen. Macht man daher einen Triangel, dessen Grundlinie und Höhe gleich sind dem Umfange und Halbmesser des Kreises: so haben beyde Figuren eine gleich große Fläche. — Es ist nicht nöthig, daß man wirklich einen solchen Triangel zeichnet, der einem gegebenen Kreise gleich ist; man kann sich aber doch vorstellen, als wenn ein solcher gezeichnet worden wäre. — Hierauf beruhet nun die folgende Aufgabe von der Ausmessung der Fläche eines Kreises.

§. 164.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Kreises zu finden.

Auflösung. Stelle dir vor, als sey der Kreis in einen gleich großen Triangel verwandelt, dessen Grundlinie und Höhe dem Umfang und Radius des Kreises gleich sind. Da man nun den Inhalt eines Tr. findet, wenn man seine Grundlinie mit der halben Höhe multipliciret (§. 156.), so findet man auch den Inhalt des Kreises, wenn man seinen Umfang mit dem halben Radius (oder 4ten Theil des Durchmessers) multipliciret. (Wenn es wegen der Zahlen bequemer ist: so kann man auch den ganzen Durchmesser mit dem 4ten Theil der Peripherie multipliciren, oder, um die Brüche zu vermeiden, kann man auch den ganzen Umfang mit dem ganzen Durchmesser multipliciren, und das Produkt mit 4 dividiren.

Z. B.

Z. B. Durchmesser = 100″, Peripherie = 314″. Multiplicire 314 mit 25.

314
25
1570
628

Inhalt des Kreises = 7850 Quadrat-Zolle.

§. 165.

Anmerkung.

Da alle Kreise, sie mögen groß oder klein seyn, einander ähnlich sind: so müssen sich die Längen des Durchmessers und der Peripherie bey einem wie bey dem andern verhalten: das heißt, es muß bey jedem Kreise ein gewisses bestimmtes Verhältniß zwischen dem Durchmesser und der Peripherie statt finden. Dieses ist ohngefehr wie 1 zu 3, oder die Peripherie ist etwas größer, als 3mal so lang, wie der Durchmesser. Wenn man z. B. ein Band um einen Hut ziehen will: so darf man das Band nur quer über die Mitte des Hutes legen, diese Länge 3mal nehmen, und noch etwas zugeben: so ist das Band lang genug, um den Hut damit einzufassen.

Da indessen dieses Verhältniß, wie 1 zu 3, nicht sehr richtig ist: so hat man durch verschiedene Kunstgriffe, (die hier nicht weiter beschrieben werden können,) richtigere Verhältnisse gefunden. In den Rechnungen nimmt man gewöhnlich an, daß sich der Durchmesser zur Peripherie verhält, wie 100 zu 314, oder wie 7 zu 22. Wir wollen in den folgenden Rechnungen das erstere Verhältniß gebrauchen, weil die Division und Multiplication mit 100 sehr kurz ist. — Weit genauer ist das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie wie 1000000 : 3141592. Doch ist in den gewöhnlichen Rechnungen das Verhältniß wie 100 : 314 genau

genau genug. Statt dessen kann man auch 1 : 3,14 setzen.

Es würde beschwerlich und unnöthig seyn, wenn man sowohl den Durchmesser, als die Peripherie eines Kreises, dessen Fläche man ausrechnen will, messen wollte. Wenn man nur eins von beyden gemessen hat: so kann man mit Hülfe des obigen Verhältnisses nach der Regel de Tri das andere ausrechnen.

§. 166.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Kreises auszurechnen, dessen Durchmesser gemessen worden ist.

Auflösung. Sage nach der Regel de Tri: wie sich verhält 100 zu 314, so verhält sich die gemessene Länge des Durchmessers zu der Länge der Peripherie. Wenn diese gefunden worden ist: so multiplicire sie mit dem 4ten Theil des Durchmessers.

Z. B. der Durchmesser sey = 2′8″ oder 28″

100 : 314 = 28 : Peripherie

```
        28
     ------
      2512
      628
     ------
     87,92 = Länge der Peripherie
         7 = ein ¼ des Durchm.
   --------
    615,44 Q. Schuhe = Inhalt des Kreises.
```

§. 167.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Kreises auszurechnen, dessen Peripherie gemessen worden ist.

Auflösung. Sage nach der Regel de Tri: wie sich verhält 314 zu 100, so verhält sich die ge-

gemessene Länge der Peripherie zu der Länge des Durchmessers. Wenn diese gefunden worden ist: so multiplicire den 4ten Theil davon mit der Peripherie (oder auch den ganzen Durchmesser mit dem vierten Theile der Peripherie.)

Z. B. die Peripherie sey = 60″.

314 : 100 = 60 Durchmesser

```
        60
314)  6000 | 19,1 = Länge des Durchmessers
       314
      2860      19,1
      2826        15 = ¼ der Peripherie
       340       955
       314       191
        26      286,5 = Inhalt des Kreises.
```

§. 168.

Anmerkung.

Die Ausrechnung der Flächen der Kreise kommt häufig vor, besonders bey der Berechnung des Inhalts mancher Körper, wie in der Folge gezeigt werden soll.

§. 169.

Lehrsatz.

Wenn man (fig. 132.) in Kreisen von verschiedener Größe auf ihre Durchmesser ab und cd Quadrate zeichnet; so muß eines jeden Kreises Fläche zu der Fläche des Quadrats seines Durchmessers in einem gewissen bestimmten Verhältnisse stehen.

Beweis. Denn sowohl alle Kreise, als alle Quadrate sind, jede unter sich, einander ähnlich.

§. 170.

§. 170.

Aufgabe.

Das Verhältniß zwischen der Fläche des Kreises und der Fläche des Quadrats auf seinem Durchmesser zu finden.

Auflösung. Wir wollen annehmen, der Durchmesser sey in 100 gleiche Theile getheilt, welche Zolle heißen mögen; so hält die Peripherie 314 solcher Zolle (§. 165.) Nun multipliciren wir 100 mit sich selbst, so erhalten wir 10000 Q. Zolle, als den Flächeninhalt des Quadrats auf dem Durchmesser. — Wenn wir ferner 314 mit 25 (als dem 4ten Theile des Durchmessers) multipliciren; so erhalten wir 7850 Quadrat-Zolle als die Fläche des Kreises. Also verhält sich die Fläche des Kreises zur Fläche des Quadrats vom Durchmesser, wie 7850 zu 10000, oder wie 785 zu 1000. (Denn das Verhältniß ändert sich nicht, wenn man an beyden Zahlen eine Nulle wegstreicht; so wie zum Beyspiel 20 zu 30 sich verhält, wie 2 zu 3.)

§. 171.

Aufgabe.

Man kann mit Hülfe dieses Verhältnisses noch auf eine andere Art den Inhalt eines Kreises ausrechnen, wenn dessen Durchmesser gemessen worden ist.

Auflösung. Nimm das Quadrat von dem gemessenen Durchmesser, und sage nach der Regel de Tri: wie sich verhält 1000 zu 785, so verhält sich die Fläche des Quadrats vom gemessenen Durchmesser zur Fläche des Kreises.

Z. B.

Z. B. der Durchmesser sey = 4′, so ist die Fläche seines Quadrats = 16 Q. Schuhe.

```
1000 : 785 = 16 : Fläche des Kreises
        16
      ----
      4710
      785
      ------
1000 | 12560 | 12,56 Q. Schuhe ist die Fläche
       -----         des Kreises.
       1000
      -----
       2560
       2000
      -----
        560
```

§. 172.

Anmerkung.

Aus dem §. 169. folgt, daß wenn man in die drey Quadrate fig. 103. Kreise zeichnet, die Flächen der beyden kleinern Kreise zusammengenommen der Fläche des größern Kreises gleich seyn müssen. Denn was von den Quadraten gilt (siehe §. 119.), muß auch von den darin gezeichneten Kreisen gelten.

Viertes Kapitel.

Von der Aehnlichkeit der Triangel.

§. 173.

Lehrsatz.

Wenn (fig. 118.) in dem Tr. abc eine Linie nw mit der Linie ac parallel lauft; so schneidet sie von den Linien bc und ba zwey Stücke bn und bw ab, welche sich so verhalten, wie die ganzen Linien bc und ba, oder es ist bn : ba = bw : bc.

Beweis. Denn in dem §. 143. wurde gezeigt, daß sowohl bc als ba, jedes in 5 gleiche Theile getheilt worden. Also ist bn : ba = 3 : 5, und bw : bc = 3 : 5. Daher ist bn : ba = bw : bc.

Eben so ist bm : ba = bx : bc, weil bm : ba = 4 : 5, und bx : bc = 4 : 5.

§. 174.

Anmerkung.

Wenn man daher (fig. 133.) in einem Triangel abc irgendwo eine Linie de mit einer Seite bc parallel ziehet; so stehen die abgeschnittenen Stücke ad und ae in eben dem Verhältniß, wie die ganzen Linien ab und ac. Das heißt: es ist ab : ac = ad : ae. Z. B. wenn ab : ac = wie 7 : 8, so ist auch ad : ae

ae = 7 : 8. Denn es ist möglich, die Linie ab in so viele gleiche Theile getheilt zu denken, daß ein Theilungspunkt in d falle. Da nun de parallel mit bc ist; so muß ae so viele gleiche Theile halten, als ad, und ac so viele als ab, (obgleich die Theile der Linie ae nicht grade eben so groß, als die Theile von ab seyn müssen, sondern größer oder kleiner werden, nachdem ac länger oder kürzer, als ab ist.)

Aus eben dem Grunde folgt, daß wenn (fig. 134.) de mit ac parallel lauft, bd : ba = be : bc, und wenn (fig. 135.) de mit ab parallel lauft, so ist cd : ca = ce : cb.

Man mag also eine Linie de, mit welcher von den 3 Seiten des Tr. man will parallel ziehen, so müssen die abgeschnittenen Stücke in eben der Proportion stehen, wie die ganze Linien, die geschnitten worden sind.

§. 175.

Anmerkung.

Bey der Figur 133. gelten auch folgende Proportionen db : ab = ec : ac
ferner, ad : db = ae : ec
ferner, ad : de = ab : bc
ferner, ae : ed = ac : cb.

§. 176.

Aufgabe.

Zu drey gegebenen Linien ad, ae, ab die vierte Proportionallinie zu finden, so daß sich ad zu ae, wie ab zur vierten verhält. (fig. 136.)

Auflösung. Zeichne einen Winkel von willkührlicher Größe. Trage aus der Spitze auf einen Schenkel die Linie ad, und auf den andern Schenkel die Linie ae. Ziehe die Li-

nie de. Dann trage auf den ersten Schenkel die Linie ab, und ziehe durch b eine Parallellinie mit de, welche den andern Schenkel in c schneidet. Nun ist ac die gesuchte vierte Proportionallinie. — Wenn z. B. ad = 4″ ac = 5″, ab = 8″; so ist ae = 10″. — Der Beweis fließt aus §. 174.

§. 177.

Lehrsatz.

Wenn (fig. 137.) alle Winkel eines Tr. ABC allen Winkeln eines andern Tr. abc in gehöriger Ordnung genommen gleich sind, so daß WA = Wa, WB = Wb, WC = Wc; so stehen die Seiten des einen Tr. in eben dem Verhältniß, wie die Seiten des andern.

Beweis. Weil WA = Wa, so kann man sich vorstellen, als sey der kleinere Tr. abc mit der Spitze a auf die Spitze A des größern Tr. ABC gelegt (fig. 138.), so daß ab in AB, und ac in AC fallen muß. Nun muß bc mit BC parallel laufen, weil WB = Wb, und WC = Wc (§. 76.) Daraus folgen, nach den §. 173 und 174. die Proportionen.

$$AB : BC = ab : bc$$
$$AB : AC = ab : ac$$
$$AC : CB = ac : cb$$

§. 178.

Anmerkung.

Man kann auch den kleinen Tr. abc mit der Spitze in B legen (fig. 139), so liegt ac mit AC parallel, weil Wa = WA, Wc = WC, und es folgen dieselbigen Proportionen.

Wenn

Wenn man (fig. 140.) die Spitze c in C legt, so muß wieder ab mit AB parallel laufen: also folgen auch dieselbigen Proportionen.

§. 179.

Anmerkung.

Wenn zwey Winkel eines Tr. zwey Winkeln eines andern Tr. gleich sind, so muß auch der dritte Winkel des einen dem dritten Winkel des andern Tr. gleich seyn, (weil ihre Summe immer 180° ist, nach dem §. 78.) Daher kann man statt des Lehrsatzes §. 177. auch sagen: wenn in 2 Tr. zwey Winkel gleich sind, so stehen die Seiten in Proportion.

§. 180.

Anmerkung.

Man kann den Satz auch umkehren: wenn in einem Triangel eine Linie mit einer der drey Seiten parallel lauft; so müssen die Winkel des kleinern Triangels den Winkeln des größern gleich seyn.

Ueberhaupt: wenn die Seiten zweyer Triangel in Proportion stehen; so müssen auch die Winkel des einen den Winkeln des andern in gehöriger Ordnung gleich seyn.

§. 181.

Erklärung.

Aehnliche Triangel sind solche, welche gleiche Winkel in gehöriger Ordnung haben, und deren Seiten zu einander in Proportion stehen.

§. 182.

Aus dem Vorigen folgt der Hauptsatz:

Zwey

Zwey Triangel sind einander ähnlich, wenn man gemessen hat, daß

1) entweder zwey Winkel in ihnen gleich sind;

2) oder daß die Seiten des einen in demselben Verhältnisse stehen, wie die Seiten des andern;

3) oder daß ein Winkel in beyden gleich ist, und wenn man sie mit diesen gleichen Winkeln in einander legt, die Grundlinie des einen Triangels der Grundlinie des andern parallel laufe.

§. 183.

Anmerkung.

Das Zeichen der Aehnlichkeit ist ein liegendes S, (nämlich ∽). Wenn man z. B. bezeichnen will, daß die Tr. der 137sten Figur einander ähnlich sind, so setzt man: Tr. ABC ∽ Tr. abc.

Da alle gradlinichte Figuren in Triangel getheilt werden können; so besteht ihre Aehnlichkeit in denselben Eigenschaften, die wir bey ähnlichen Tr. antreffen. Zwey gradlinichte Figuren sind daher ähnlich, wenn 1) die Winkel in gehöriger Ordnung in beyden gleich sind, 2) die Seiten der einen in demselben Verhältnisse stehen, wie die Seiten der andern. Z. B. wenn fig. 141. WA = Wa, WB = Wb, WC = Wc, WD = Wd, WE = We, und AB : BC = ab : bc, ferner BC : CD = bc : cd, ferner CD : DE = cd : de, ferner DE : EA = de : ea, ferner EA : AB = ea : ab.

§. 184.

Aufgabe.

Einen Tr. abc (fig. 137.) zu zeichnen, der einem andern ABC ähnlich, wenn eine Seite bc gegeben ist.

Auflösung. Mache entweder die zwey Winkel c und b den zwey Winkeln C und B gleich: oder suche zu CB, BA, und cb die 4te Proportionallinie, wie auch zu CB, CA, und cb; so findest du die Linien ba und ca (§. 176.)

§. 185.

Aufgabe.

Einer jeden gegebenen gradlinichten Figur eine ähnliche zu verzeichnen. Z. B. Es sey fig. 141. ABCDE gegeben, man soll ein ähnliches Fünfeck abcde zeichnen.

Auflösung. Zerfälle die gegebene Figur ABCDE durch Diagonallinien in Tr. und zeichne nach dem vorigen §. ähnliche Tr. in derselben Ordnung und Lage, wie sie in der ersten Figur liegen, so entstehet dadurch die ähnliche Figur abcde.

§. 186.

Aufgabe.

Einen tausendtheiligen Maasstab (fig. 142.) zu verfertigen.

Auflösung. Die ganze Länge des Maasstabs AB wird in 10 gleiche Theile getheilt, von denen hier nur 3 abgebildet sind. Der erste Theil AC wird wieder in 10 gleiche Theile getheilt. Dieses sind Hunderttheile des Maasstabs, die mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6,

7,

7, 8, 9, von C nach A bezeichnet sind. Von A nach D wird rechtwinkelicht auf AC eine Linie von willkührlicher Länge aufgerichtet; die auch in 10 gleiche Theile getheilt wird. Durch diese Theilungspunkte werden Parallellinien mit AB gezogen, deren letzte die Linie DF ist. Endlich werden queerüber Linien von D nach 9, von 9 nach 8, von 8 nach 7 u. s. w. zuletzt von 1 nach C gezogen. Durch diese Queerlinien werden die Räume von E nach 1, von 1 nach 2 u. s. w. wieder in 10 gleiche Theile getheilt. Denn in dem Tr. CE1 liegt der kleine Tr. Cmn, dessen Linie mn mit E1 parallel lauft. Daher ist Tr. CE1 $\sim$ Tr. Cmn (§. 175.)

Also ist CE : Cn = E1 : mn
Da nun CE : Cn = 10 : 1.
so ist auch E1 : mn = 10 : 1.

Also ist mn = $\frac{1}{10}$ von E1 = $\frac{1}{100}$ AC = $\frac{1}{1000}$ von dem ganzen Maasstabe. — Aus eben den Gründen ist or = $\frac{2}{10}$ E1.

Denn CE : Cr = 10 : 2
und CE : Cr = E1 : or
daher E1 : or = 10 : 2.

§. 187.

Anmerkung.

Man kann AC als eine Ruthe ansehen, C1 als einen Schuh, mn als einen Zoll. Dieser Maasstab dient also dazu, um eine Figur, die man nach dem gewöhnlichen großen Maasstabe auf dem Felde gemessen hat, verkleinert auf das Papier zu zeichnen. Er heißt daher auch der verjüngte Maasstab. Uebrigens ist es willkührlich, wie groß dieser Maasstab seyn soll. Wer viel mit Zeichnungen zu thun hat, thut am besten, wenn er sich einige verjüngte Maas-

Maaßstäbe von verschiedener Länge verfertiget, um die Wahl zu haben, wie groß oder klein er den Riß verfertigen will, den er zu machen hat. Auch muß dieser verjüngte Maaßstab nicht grade in tausend, sondern kann auch in mehrere oder wenigere gleiche Theile getheilt werden.

Mit Hülfe dieses Maaßstabes, eines Cirkels, Lineals und Transporteurs kann man gemessene Felder, Waldungen und dergleichen im Kleinen abzeichnen, oder in Grund legen. — Zweytens: wenn der Maaßstab bekannt ist, nach welchem eine Figur gezeichnet worden ist; so kann man hernach jede Linie derselben mit dem Cirkel nehmen, und an den Maaßstab setzen, um ihre Länge zu erfahren. Dieser zweyfache Gebrauch eines so nützlichen und für den Geometer unentbehrlichen Instruments soll bey künftigen Aufgaben noch mehr erläutert werden.

§. 188.

Aufgabe.

Einen Winkel auf dem Felde zu messen.

Auflösung. Man gebraucht dazu verschiedene Instrumente, wovon wir einige der vorzüglichsten beschreiben wollen.

1) Das Meßtischchen. Dieses ist ein gewöhnliches viereckigtes Tischchen auf einem festen Stand, worauf es nach der Setzwage horizontal gestellt werden kann. Hierauf wird ein Bogen Papier, entweder mit einem viereckigten Rahmen, oder mit Mundleim auf das Tischchen bevestigt, und wohl ausgespannt. Um über das Tischchen hin visiren zu können, gebraucht man ein Lineal von Holz oder Messing (fig. 143.), woran zwey Plättchen an beyden Enden

mit

mit Einschnitten rechtwinkelicht angebracht sind, durch welche man visiren kann. Diese Plättchen heißen Diopteru, und das Lineal heißt das Diopternlineal.

Will man nun mit dem Meßtischchen einen Winkel BAC (fig. 144.) auf dem Felde aufzeichnen: so stellt man es genau über den Punkt A, und visirt nach den Gegenständen B, C (welches Bäume, Thürme, oder auch eingesteckte Stäbe seyn können) mit dem Diopternlineal, und ziehet mit Bleystift die Linien ab und ac, worauf man diesen Winkel bac mit dem Transporteur messen kann.

2) Das Astrolabium. Dieses ist ein ganzer oder halber Kreis von Messing, der in 360 oder 180 Grade, jeder Grad wieder in halbe und Viertel-Grade getheilt ist. Es stehet auf einem dreyfüßigen Stand oder Stativ, und ist so eingerichtet, daß man es sowohl horizontal als vertikal stellen kann. (Diese ganze Einrichtung läßt sich an einem Astrolabio leicht zeigen, daher sie hier nicht weitläuftig beschrieben werden soll. Nur bemerke ich noch, daß die vertikale Stellung, zum Unterschied von der horizontalen, diejenige heißet, wenn die Fläche des Astrolabiums senkrecht nach der Erdoberfläche stehet, wie z. B. die Wand eines Gebäudes. Man nennt die horizontale Stellung auch die waagrechte, und die vertikale die lothrechte. Denn ein an einem Faden herunterhängendes Gewicht heißt ein Loth.)

Auf dem Astrolabio sind zwey Lineale mit Dioptern (wie das fig. 143.) angebracht.

Das

Das eine steht fest vom 1sten bis zum 180sten Grade; das andere ist um den Mittelpunkt des Instruments beweglich.

Will man nun einen Winkel in horizontaler Fläche messen; so stellt man (fig. 145.) das Astrolabium an die Spitze desselben A, und visiret mit dem feststehenden Diopternlineal nach B, worauf man das bewegliche Diopternlineal so lange rücket, bis man den Gegenstand C dadurch erblicket. Hierauf kann man auf dem zwischen den beyden Linealen liegenden Bogen die Grade zählen, welche das Maas des Winkels BAC angeben.

Soll aber (fig. 146.) ein Winkel in vertikaler Stellung gemessen werden, (wie z. B. wenn man den Winkel messen wollte, den zwey Linien machen, die von der Spitze eines Thurms und von seinem Fuße nach einem Punkte A gezogen werden): so stellt man das Astrolabium vertikal in den Punkt a, und visiret wieder durch die zwey Lineale nach B und C, worauf man die Grade des Bogens zählen kann, der zwischen den beyden Linealen liegt. Diese geben das Maas des Winkels BAC.

§. 189.

Anmerkung.

Man braucht zur Messung der Winkel auch die Boussole, einen in 360° eingetheilten Kreis, in dessen Mittelpunkt sich eine Magnetnadel frey bewegt. Diese zeigt immer mit ihrer Spitze nach Norden. Dabey ist auch ein Diopternlineal angebracht. Stellt man nun das Instrument an die Spitze des Winkels, und visirt zuerst nach einem Schenkel hin, wo man sich den Stand der Magnetnadel merkt; so wird sich, in-

dem man das Instrument drehet, und nach dem andern Schenkel visiret, die Nadel um einen eben so großen Winkel an dem Kreise fortschieben, und man kann nun nur die Grade zählen, die die Nadel während des Umdrehens durchlaufen hat, so weiß man die Größe des Winkels, der gemessen werden sollte.

Andere Instrumente zur Messung der Winkel, wie z. B. die Zollmannische Meßscheibe, übergehen wir hier.

§. 190.

Aufgabe.

Die Entfernung zweyer Orte B und C zu messen, wenn man aus einem Standpunkte A an beyde hinkommen, und also die Linien AB und AC messen kann.

Auflösung. 1) Mit dem Meßtischchen (fig. 144.) Setze das Tischchen in A, und zeichne den Winkel BAC nach der vorher beschriebenen Weise auf das Papier. Hierauf messe die Linien AB und AC mit der Meßkette und trage das Maas derselben im Kleinen von dem verjüngten Maasstabe mit dem Cirkel auf das Tischchen von a nach b und c. Ziehe die Linie bc. Diese Linie nimm mit dem Cirkel, und setze sie auf den verjüngten Maasstab. Soviel diese auf dem kleinen Maasstabe hält, eben soviel hält BC nach dem großen Maase auf dem Felde.

Z. B. Man wollte wissen, wie weit zwey Bäume B und C von einander entfernt wären, zwischen welchen eine Hecke, Sumpf, oder dergleichen läge, daß man nicht grade von B nach C messen könnte. Gesetzt, AB wäre = 200° und AC = 240°, so müßten ab und bc eben so groß nach dem kleinen Maasstabe

stabe gemacht werden. Wenn man nun endlich durch die Messung der Linie ac auf dem kleinen Maasstabe fände, daß sie 120° groß wäre, so müßte die Entfernung von B nach C auch 120° nach dem großen Maase seyn.

Beweis. Tr. ABC und Abc sind ähnlich. Denn AB : AC = 200 : 240, und Ab : Ac = 200 : 240. Daher stehen die Seiten des kleinen und großen Tr. in Proportion, und den Winkel A haben sie gemeinschaftlich. Daher folgt aus §. 182., daß die beyden Tr. ähnlich sind, die Seiten des kleinen Tr. zu den Seiten des großen sich verhalten, wie das kleine Maas zum großen. Wenn also bc im kleinen Maase 120° hält; so muß auch BC im großen Maase 120° halten.

Mit andern Worten heißt das so viel.

Ab : bc = 200 : 120 im kleinen Maase.

Also AB : BC = 200 : 120 im großen Maase.

2) Mit dem Astrolabio (fig. 145.) Messe den Winkel A, und mit der Meßkette die Linien AB und AC. Zeichne auf ein Papier einen kleinen Tr. abc, wo Wa = WA, und ab, ac nach dem kleinen Maase so groß sind, als AB, AC nach dem großen. Messe hierauf bc nach dem kleinen Maasstabe, so weißt du, wie groß BC nach dem großen Maase ist.

Der Beweis ist derselbe, wie vorhin. Der ganze Unterschied in diesen beyden Verfahrungsarten besteht nur darin, daß man auf das Tischchen sogleich den kleinen Tr. aufzeichnet, der dem großen ähnlich ist. Wenn man sich aber des Astrolabiums bedienet; so wird der kleine Tr. hernach zu Hause gezeichnet. Dieses findet bey allen dergleichen Messungen

 statt.

statt. Daher wollen wir es hier einmal für allemal anmerken.

§. 191.

Aufgabe.

Die Entfernung von B nach C zu messen, wenn man vom Standpunkte A nicht an beyde, sondern nur an einem B messen kann, als wenn z. B. zwischen A und C ein Fluß oder dergleichen befindlich ist.

Auflösung. 1) Mit dem Meßtischchen (fig. 147.) Stelle das Tischchen in A, zeichne den WBAC darauf, messe die Linie AB, und trage sie aufs Tischchen von a nach b. Hierauf stecke einen Stab in A, und stelle das Tischchen in B, so daß die Linie ab genau in AB fällt. Visire nach C hin, so werden auf dem Tischchen die Linien von b und a sich in c schneiden. Messe die Linie bc nach dem kleinen Maase. Dieses zeigt die Größe der Linie BC nach dem großen Maase.

Beweis. Denn Tr. ABC und Tr. abc sind ähnlich, weil die Winkel darin gleich sind: also verhalten sich auch die Linien des Tr. ABC so gegeneinander, wie die Linien des Tr. abc (§. 182.)

Gesetzt, AB = 150°, so ist ab = 150° nach dem kleinen Maase. Wäre also bc = 160° nach dem kleinen Maase, so wäre auch BC = 160° nach dem großen Maase.

ab : bc = 150 : 160
AB : BC = 150 : 160.

2) Mit dem Astrolabio. Messe die Winkel A und B, und die Linie AB mit der Meßkette.

kette. Zeichne zu Hause einen kleinen Tr. abc, worin ab nach dem kleinen Maase so viel hält, als AB nach dem großen, und mache mit dem Transporteur Wa = WA, Wb = WB. Nun ist Tr. abc ∽ Tr. ABC, weil die Winkel gleich sind. Also kann man wieder bc nach dem kleinen Maase messen, so zeigt dieses an, wie viel BC nach dem großen Maase hält.

§. 192.

Aufgabe.

Auf eine andere Art die Entfernung eines Ortes a von b zu finden, wenn man von b nicht nach a kommen kann. (fig. 148.)

Auflösung. Setze bey b einen rechten Winkel cba an. (Dieses kann entweder mit dem Instrumente fig. 55. geschehen, wo man durch einen Kreuzschnitt nach a visiret, und darauf einen Stab c in die Linie stecken läßt, welche man durch den andern Kreuzschnitt bemerket. Oder man gebraucht das Astrolabium, wo man die beyden Lineale so stellt, daß sie rechte Winkel formiren, und nun durch die Dioptern des einen nach a, und die des andern nach der Gegend hin visiret, wo man den Stab c einstecken lässet. Man kann drittens auch das Meßtischchen gebrauchen, wenn man darauf zwey sich rechtwinkelicht schneidende Linien gezeichnet hat, und das Tischchen so rücket, daß man durch das an die eine Linie gelegte Diopternlineal den Gegenstand a erblicket, und hierauf das Lineal an die andere Linie leget, und nach der Gegend hinsiehet, wo der Stab c eingesteckt wird.)

Nachdem dieses geschehen, so messe auf der Linie von b nach c 10 Ruthen ab bis g, wo ein

ein Stab eingesteckt wird. Von g nach d wird noch eine Ruthe gemessen. Bey d wird ebenfalls ein rechter Winkel gde angesetzt. Einer der Gehülfen stellt sich bey das Instrument in d, und visiret nach der Gegend von e hin. Ein anderer geht mit einem Stabe in der Linie de fort, bis er siehet, daß der Stab g und a in einer Linie stehen (oder sich decken). Dann steckt er seinen Stab in f ein. Nun stehen fga in einer Linie, und es entstehen zwey Tr. bag und dfg, welche ähnlich sind. Denn Wo = Wx als Vertikalwinkel. Wabg = Wgdf als rechte Winkel, also auch Wbag = Wdfg. Nun müssen also die Seiten der beyden Tr. in Proportion stehen.

dg : df = bg : ba
oder dg : bg = df : ba
Nun ist dg : bg = 1 : 10
also ist auch df : ab = 1 : 10.

Messe daher df, und multiplicire es mit 10 (hänge eine Nulle an die Zahl) so weißt du, wie viel Ruthen ab lang ist. — Z. B. Es sey df = 12°, so ist ab = 120°.

§. 193.

Anmerkung.

Man hätte auch bey b und d statt der rechten Winkel zwey gleiche stumpfe Winkel ansetzen können, und die Linien dg und bg länger oder kürzer machen können, als vorhin. Dann müßte man nach der Regel de Tri rechnen, wie sich dg zu bg verhält: so verhält sich df zu ab. Auf die beschriebene Art ist alles bequemer. Denn wenn sich dg zu bg wie 1 zu 10 verhalten: so bedarf man keiner Rechnung. dg kann sich zu bg auch wie 1 : 100 verhalten.

§. 194.

Aufgabe.

Die Breite eines Flusses ab zu finden.

Erste Auflösung. (Fig. 149.) Stecke Stäbe in a und b. Messe an dem Ufer hin eine Linie von willkührlicher Länge bc. Eben so lang mache cd. Messe den Winkel abc, und mache den Winkel cde ihm gleich. Gehe von d nach e fort, bis c und a sich decken. Dann stecke den Stab e ein. Nun ist de = ab.

Beweis. Tr. abc = Tr. cde. Denn 1) bey c sind Vertikalwinkel, 2) W abc = W cde, 3) bc = cd, also auch de = ab.

Zweyte Auflösung. (Fig. 150.) Stelle einen Stab bc senkrecht in b, woran oben in einer Ritze ein Queerholz oder Lineal steckt, das sich horizontal oder schief stellen läßt. Stelle dieses Lineal so schief, daß du drüber hin den Punkt a erblickest. Nun drehe den Stab bc langsam herum, so daß er nicht aus seiner senkrechten Stellung verrückt wird. Visire wieder über das Lineal, welches ebenfalls noch seine vorige Stellung haben muß. Lasse an dem Punkte d, den du auf der Erde an dem Ufer erblickest, ein Zeichen machen, und messe die Linie bd. Diese ist so lang, wie die Breite des Flusses ab.

Beweis. Tr. abc = Tr. bcd. Denn 1) bc ist gemeinschaftlich, 2) W acb = W dcb, 3) W abc = W dbc.

§. 195.

Anmerkung.

Diese beyden Auflösungen gründen sich zwar nicht auf die Lehre von der Aehnlichkeit, sondern von der Gleich-

Gleichheit der Triangel. Sie werden aber hier wegen ihrer Aehnlichkeit mit den andern vorhergehenden Aufgaben mitgenommen.

§. 196.

Aufgabe.

Die Entfernung zweyer Orte C und D zu finden, wenn man an keinen derselben aus einem gegebenen Punkte A hinmessen kann. (Dies könnte der Fall seyn, wenn zwischen A und der Linie CD ein Fluß befindlich wäre. (fig. 151.)

Auflösung. Messe eine Standlinie AB, welche aber nicht kurz seyn darf, wenn die Entfernung CD etwas lang ist. Die beyden Endpunkte A und B müssen so liegen, daß man von da die Punkte C und D sehen kann. Auch muß die ganze Linie AB so gelegt werden, daß die Winkel r, m, n, o nicht sehr spitz werden, weil es sonst schwer seyn würde, sie völlig richtig aufzuzeichnen und zu messen. — Stelle das Tischchen in A und einen Stab in B. Trage die Linie AB nach dem verjüngten Maasstabe auf das Tischchen, und zeichne an den Punkt a die Winkel r und m mit Hülfe des Diopternlineals. Hierauf stecke einen Stab in A und trage das Tischchen in B, so daß die Linie ab auf dem Tischchen in die Linie AB auf dem Felde fällt, und der Punkt b in B. Visire nach C und D, und zeichne die Winkel n und o. Alsdann werden sich die Linien bc und ac, ferner bd und ad schneiden, so daß eine kleine Figur auf dem Tischchen entstehet, die der großen ähnlich ist.

Beweis. Tr. ABC ∽ Tr. abc, weil die Winkel in beyden gleich sind. Also ist AB : BC = ab : bc.

Ferner

Ferner Tr. ABD ∽ Tr. abd, weil die Winkel in beyden gleich sind. Also ist AB : BD = ab : bd. Daher muß auch Tr. BCD ∽ Tr. bcd, weil sie einen Winkel o gemeinschaftlich haben, und die Seiten in Proportion stehen; daher muß sich auch AB zu ab verhalten, wie CD zu cd, das ist, wie das große Maaß zu dem kleinen.

Hat man also z. B. AB = 300° gefunden, und ab eben so groß nach dem kleinen Maaße gemacht: so meßt man cd nur nach dem kleinen Maaße, welches anzeigt, wie viel CD nach dem großen Maaße hält.

Wenn man statt des Tischchens das Astrolabium gebraucht: so meßt man auf dem Felde nur die Linie AB und die Winkel r, m, n, o, worauf man eine Figur abcd zeichnen kann, die der großen ABCD ähnlich ist.

§. 197.

Anmerkung.

Man kann (fig. 152.) auch die Winkel an drey Orten messen, sowohl in a und b, als in e, der Mitte zwischen beyden. Es läßt sich nun aus den gemessenen Linien ae und eb, und den gemessenen Winkeln r, m, n, o, s eine kleine Figur zeichnen, die der großen ähnlich ist, und hierauf die Linie cd in der kleinen messen, wodurch das Maas der großen bekannt wird.

§. 198.

Aufgabe.

Die Höhe ab eines Thurms, Baums und dergleichen mit Hülfe eines Stabes zu messen (fig. 153.)

Auflösung. Stecke einen Stab cd in einiger Entfernung von ab senkrecht in die Erde.

Erde. Dieser Stab kann ohngefähr 4 oder 5 Schuh lang seyn. Oben stecke man in eine Spalte ein Lineal mn, welches man um den Punkt d hin und her bewegen kann, so daß es mit dem Stabe cd jeden beliebigen Winkel formiren kann. Visire von n nach m gegen den Punkt b, und hernach von m nach n gegen die Erde, und lasse durch einen Gehülfen den Punkt e auf der Erde bezeichnen, welcher mit dem Lineal mn und dem Punkte b in einer graden Linie liegt. Messe hierauf die Linien ec und ea, und sage nach der Regel de Tri: wie sich verhält ec zu cd, so ea zu ab. — Z. B. Es sey ec = 8′, cd = 4′, ea = 40′, so ist 8 : 4 = 40 : 20. Also ist ab = 20′.

Beweis. Weil cd und ab senkrecht auf der Erde stehen, so laufen sie parallel, und Wo = Wt, Wr = Ws (§. 73). Der Wx ist beyden Triangeln ecd und eab gemeinschaftlich. Also sind sie ähnlich, und ec : cd = ea : ab.

§. 199.

Anmerkung.

Man kann auch die ganze Auflösung dadurch erleichtern, daß man das Lineal mn feststellet, so daß es mit dem Stabe cd einen Winkel von 45° macht. Dieses geschiehet folgendermasen. Man legt den Stab cd (fig. 154.) auf die Erde, und bezeichnet den Punkt e, wo seine Spitze liegt. Die 3 Punkte a, c, e müssen aber in einer graden Linie liegen. Hierauf richtet man ihn senkrecht auf, und stellet das Lineal mn so, daß man darüber weg den Punkt e erblicket. Nun ist ce = cd, also das rechtwinkelichte Dreyeck ecd ist gleichschenkelicht. Daher ist Wo = Wx (§. 65.) und jeder hält 45°. Wenn das Lineal auf diese Art gestellet worden ist; so kann man diese Aufgabe auf folgende Art auflösen.

§. 200.

Aufgabe.

(Fig. 155.) Die Höhe ab zu finden.

Auflösung. Stelle den Stab cd an denjenigen Ort, wo du drüber weg die Spitze b erblickest. Weil nun ec = cd, und die Länge cd bekannt ist: so messe nur ca, und addire dazu cd, so hast du ea. Diese Linie ist gleich der Höhe ab. — Z. B. wenn cd = 4′, ca = 22′, so ist ea = ab = 26′.

Beweis. cd ist mit ab parallel, also Wo = Wz. Nun ist Wo = 45°, also auch Wz = 45°. Da nun Wx = 45°, so ist der Tr. eab gleichschenkelicht, und ea = ab.

§. 201.

Aufgabe.

Die Höhe ab eines Thurms und dergleichen (fig. 156.) mit Hülfe des Astrolabiums zu finden, wenn man bis an den Fuß a hinmessen kann.

Auflösung. Stelle das Astrolabium cd in einiger Entfernung von ab senkrecht, wende die Scheibe vertikal (§. 188.), visire mit dem einen horizontal gestellten Diopternlineal nach dem Punkte f, und mit dem andern beweglichen Diopternlineal nach der Spitze b. Zähle die Grade des Bogens zwischen den beyden Linealen. Dies giebt den Winkel x. Weil bf auf fd senkrecht ist, so ist Wm = 90°. Messe endlich die Linie ca, welche fd gleich ist. Zeichne einen kleinen Tr., welcher dem großen Tr. dfb ähnlich ist. Mache nämlich fd im kleinen Maaſe so lang, als fd im großen Maaſe ist; setze an d mit dem Transporteur den Wx, und an f einen rechten Winkel. Da nun die Winkel

kel in beyden Tr. gleich sind, so sind sie ähnlich, und die Seiten stehen in Proportion. Also verhalten sich fd und fb nach dem kleinen Maaße so, wie nach dem großen. Wenn daher fb nach dem kleinen Maasstabe gemessen wird: so weiß man, wie viel diese Linie nach dem großen Maaße hält. — Zuletzt wird noch die Höhe des Astrolabiums cd gemessen, welche = af, und zu fb addiret, so erhält man die ganze Höhe ab.

Wenn z. B. fd = 80′ in der großen und kleinen Figur fb = 60′ in der kleinen Figur, so ist fb auch in der großen Figur = 60′. Wenn also cd = af = 4′, so ist ab = 64′.

Zu dieser Aufgabe braucht man das Meßtischchen nicht, weil man es nicht gut vertikal stellen kann.

§. 202.

Aufgabe.

Eine Höhe ab (fig. 157.) durch die Messung seines Schattens auf gleichem Boden zu finden.

Auflösung. Stecke einen Stab cd, dessen Größe bekannt ist, auf den von der Sonne beschienenen Platz senkrecht. Messe zu gleicher Zeit die Längen der Schatten von dem Thurm oder Baum ab und dem Stabe cd, nämlich die Linien ax und cz. Nun sage nach der Regel de Tri, wie sich cz zu cd verhält, so ax zu ab. — Z. B. cz = 5′, cd = 4′, ax = 40′.

$$5 : 4 = 40 : 32.$$

Also ist ab = 32′.

Beweis. ab und cd sind senkrecht, also parallel. Die Sonnenstrahlen bx und dz sind ebenfalls parallel. Also haben die Tr. cdz und

und abx gleiche Winkel, und sind ähnlich. Daher cz : cd = ax : ab.

§. 203.

Anmerkung.

Um diese Auflösung gebrauchen zu können, muß ab auf einem freyen Platze stehen, welcher eben ist, damit man den Schatten richtig messen kann. Auch müssen die Schatten von ab und cd genau zu gleicher Zeit gemessen werden, damit bx und dz als parallel laufend angenommen werden können.

§. 204.

Aufgabe.

Die Höhe ab (fig. 157. *) mit Hülfe eines Spiegels zu finden.

Auflösung. Lege den Spiegel in einiger Entfernung von ab horizontal auf die Erde. Stelle dich so weit hinter den Spiegel, bis du das Bild von der Spitze b grade in der Mitte des Spiegels in dem Punkte e erblickest. Die Linie cd soll die von dem Auge des Messenden senkrecht auf die Erde gezogene Linie seyn. Nun messe ec, cd und ea, so findest du nach der Regel de Tri ab. Gesetzt, es seye ec = 3′ cd = 5′ ea = 33′, so ist

3 : 5 = 33 : 55′.

Also ist ab = 55.

Beweis. Es ist durch Erfahrung bekannt, daß Lichtstrahlen, welche von einem Object unter einem gewissen Winkel in einen Spiegel fallen, auf der andern Seite mit dem nämlichen Winkel zurückgeworfen werden. Daher wird

Wo

Wo = Wx. Denn be ist der Strahl von der Spitze b in dem Spiegel, und ed der aus dem Spiegel zurückgeworfene Strahl in das Auge bey d. Beyde Strahlen machen also mit der horizontalen Fläche des Spiegels, oder mit der auf der Erde gezogenen horizontalen Linie aec gleiche Winkel. Nun ist ferner Wm = Wn als rechte Winkel. Also ist Tr. aeb ∽ ced, weil sie gleiche Winkel haben. Daher müssen auch ihre Seiten in Proportionen stehen, und es ist

$$ec : cd = ea : ab.$$

§. 205.

Aufgabe.

Die Höhe eines Thurms und dergl. ab (fig. 158.) zu finden, an dessen Fuß man nicht messen kann.

Auflösung. Messe eine Linie cd so, daß die Punkte acd in einer graden Linie liegen. Stecke einen Stab in c und stelle das Astrolabium in d senkrecht. Visire auf der vertikal gestellten Scheibe mit den beyden Diopternlinealen nach dem Stabe c und nach der Spitze b; dadurch wird der Winkel n gefunden. Stelle hierauf das Astrolabium in c und messe den Winkel x, wodurch auch der Nebenwinkel y bekannt wird.

Nun ist von dem Tr. fgb eine Seite, und 2 Winkel bekannt, also läßt sich ein ihm ähnlicher Tr. nach dem verjüngten Maasstabe entwerfen. Wird in diesem die Linie fg bis h verlängert, und darauf von b ein Perpendikel gefället: so entsteht ein Tr., der dem Tr. fhb ähnlich ist. In diesem wird hb nach dem kleinen

nen Maase gemessen: Dieses zeigt, wie groß hb nach dem großen Maase ist. Dazu muß noch die Höhe des Astrolabiums fc = ha addiret werden, um ab zu finden.

Z. B. Es sey hb nach dem kleinen Maase 36′ und die Höhe des Astrolabiums fc = 4′; so ist ab = 40′.

§. 206.

Aufgabe.

Die Höhe eines Gebäudes, Baums und dergleichen ab (fig. 159.) aus zwey Fenstern eines nahe stehenden Hauses, die übereinander stehen, zu messen.

Auflösung. Messe die Linie cd, um welche ein Fenster über das andere erhaben ist. Hierauf stelle das Astrolabium in beyde Fenster, und messe die Winkel, welche die Linien nach der Spitze und dem Fuße von ab machen. Wo sich die Schenkel der Winkel durchschneiden, da liegen die Punkte a und b. Man muß also die Figur im Kleinen zeichnen, und darin ab messen; so erfährt man, wie hoch ab ist.

§. 207.

Anmerkung.

Wenn man die Höhe eines kleinen Berges cb (fig. 122.) finden will: so muß man sich zweyer Stäbe bedienen, wie §. 146. gezeigt worden ist. — Man kann auch auf die Spitze ein Zeichen (z. B. eine Stange mit einer weißen Fahne) stecken lassen, und nach den vorigen §§. die Höhe messen. Doch wird dieses Verfahren nur bey geringen Höhen anwendbar seyn. — Die Höhe ansehnlicher Gebirge wird gewöhnlich mit Hülfe eines Barometers gefunden. — Will man wissen,

sen, wie viel ein Ort, der eine halbe oder ganze Meile, oder mehrere Meilen von einem andern entfernt ist, höher oder tiefer liegt: so muß man sich dazu eines Instruments bedienen, das unter dem Namen Wasserwage bekannt ist. — Von allen diesen und mehreren Messungen findet man in größern Werken Nachricht; (z. B. in J. Tobias Mayers Unterricht zur praktischen Geometrie. Göttingen 1792. zweyte Auflage. 4 Theile in 8vo.)

§. 208.
Erklärung.

Eine Gegend aufnehmen und in Grund legen, heißet, entweder die Umfangslinien und Diagonalen, oder Linien und Winkel, oder eine Standlinie, und die an den Enden derselben liegenden Winkel messen, und darnach eine kleine ähnliche Figur zeichnen. Wir wollen die verschiedenen Methoden einzeln durchgehen.

§. 209.
Aufgabe.

Eine Figur ohne Instrument zum Winkelmessen in Grund zu legen (fig. 141.)

Auflösung. Messe alle Umfangslinien, und drey Diagonalen weniger, als jene sind, wodurch die Figur in Tr. getheilt wird. Hierauf wird jeder Tr. im Kleinen aufgezeichnet, wodurch eine ähnliche Figur entstehet. (Siehe §. 185.)

§. 210.
Anmerkung.

Diese Methode ist etwas unbequem, weil sie lange aufhält, da sehr viele Linien gemessen werden müssen.

Daher

Daher wird sie nur bey der Grundlegung kleiner Felder, Wiesen, Gärten und dergleichen gebraucht, wenn man keinen Winkelmesser anwenden will.

§. 211.

Aufgabe.

Eine gradlinichte Figur aus einem Punkte g innerhalb derselben in Grund zu legen (fig. 160.)

Auflösung. Stelle das Meßtischchen in g, und stecke in den Punkt auf dem Tischchen, der grade über dem Punkte g auf der Erde ist, eine Nabel. Von hier aus visire nach allen Stäben, die in die Eckpunkte der Figur A, B, C u. s. w. gesteckt sind, und ziehe Linien auf dem Papier. Messe die Linien gA, gB u. s. w., und trage sie nach dem verjüngten Maaßstabe auf das Tischchen von g nach a, b, c, d u. s. w. Diese Endpunkte a, b, c ꝛc. werden zusammengezogen, wodurch eine kleine Figur entstehet, die der großen ähnlich ist. Denn die Tr. gab und gAB, ferner gbc und gBC u. s. w. haben einen Winkel gemein, und die Seiten stehen in Proportion.

§. 212.

Anmerkung.

Man kann zu dieser Aufgabe auch das Astrolabium gebrauchen, wodurch die Winkel um g gemessen, und zu Hause mit den gemessenen Seiten so zusammengesetzt werden, daß eine ähnliche Figur entstehet. Auf dem Felde zeichnet man sich in eine Schreibtafel eine Figur aus freyer Hand, die mit der großen Figur ohngefähr dieselbe Gestalt hat. In diese schreibt man die Größe der Seiten und Winkel, und zeichnet darnach zu Hause die richtige Figur. Aber das Meßtischchen ist um deswillen bequemer, weil man darauf sogleich die

ganze verkleinerte Figur bekommt, ohne daß man es zu verrücken nöthig hat.

Auch diese Auflösung geht, wie die vorige, nur auf die Grundlegung solcher Figuren, welche 1) so beschaffen sind, daß man drinnen herumgehen kann. Daher nicht auf Moräste, Seen, Teiche und dergl. — 2) Muß die Fläche nicht mit Wald bewachsen seyn, weil man sonst nicht aus einem Punkt innerhalb derselben an die Ecken sehen kann; 3) darf sie nicht sehr groß seyn, weil sonst das Messen der vielen Linien an die Ecken sehr beschwerlich seyn würde.

§. 213.

Aufgabe.

Eine gradlinichte Figur aus dem Umfang in Grund zu legen (fig. 161.)

Auflösung. Stecke Stäbe in die Ecken A, B, C u. s. w. Messe mit dem Astrolabium die Winkel FAB, ABC, BCD u. s. w. und mit der Meßkette die Linien AB, BC, CD, DE u. s. w. (Doch ist es schon hinreichend, wenn man drey Winkel weniger, als Umfangslinien sind, messet.) Hierauf kann man nach dem verjüngten Maaßstabe die Linien ab, bc, cd u. s. w. nach derselben Proportion nehmen, wie in der großen Figur, und sie unter denselben Winkeln zusammensetzen, so, daß Wa = WA, Wb = WB u. s. w., so entsteht eine Figur, die der großen ähnlich ist.

Will man das Tischchen gebrauchen; so steckt man in die Eckpunkte Stäbe, messet die Umfangslinien, stellt das Tischchen in A, visiret nach F und B, und trägt die Linie AB im Kleinen von a nach b. Auf diese Art verfährt man bey jedem Winkel, bis sich zuletzt

die

die kleine Figur auf dem Tischchen schließet, welche der großen ähnlich ist.

§. 214.

Anmerkung.

Diese Aufgabe findet bey Waldungen, Seen, sumpfichten Gegenden, Vestungen und dergleichen statt, wo man keinen Standpunkt innerhalb der Figur wählen kann. Man kann, wenn die Figur groß ist, bey trübem Wetter die Umfangslinien messen; bey heiterm Himmel die Winkel.

§. 215.

Aufgabe.

Eine gradlinichte Figur aus zwey Orten a und b (fig. 162.), woraus man sie ganz übersehen kann, in Grund zu legen.

Auflösung. Messe die Standlinie ab. Sowohl an a als an b visire nach den Punkten c, d, e, f u. s. w., wo entweder Stäbe stecken, oder Bäume, Kirchthürme und dergleichen stehen. Da man nun in allen Tr. abc, abd, abe u. s. w. eine Linie ab und die Winkel weiß; so kann man eine kleine ähnliche Figur verzeichnen.

Wird das Tischchen gebraucht, so wird die Standlinie ab verkleinert aufgetragen, und nun an ab unter den gehörigen Winkel die Linien ac, bc, ad, bd u. s. w. angesetzt, wodurch man sogleich die kleine Figur auf dem Felde in Grund leget.

§. 216.

Anmerkung.

Man kann dadurch eine ganze Gegend, von mehreren Stunden in die Länge und Breite aufzeichnen. Die Punkte c, d, e, f ꝛc. sind die merkwürdigsten Gegenstände, z. B. große Bäume, Thürme, andere Gebäude. Die Standlinie muß alsdann verhältnißmäßig lang seyn, damit die Winkel cab und cba wenigstens um einige Grade verschieden sind. Weil auch die sehr spitzigen Winkel die Durchschneidungspunkte nicht gar genau geben; so muß die Standlinie ab eine solche Lage haben, daß ihre Verlängerung nicht gar zu nahe an einem der Orte c, d, e u. s. w. vorbeylauft. Denn sonst würden die Winkel zu spitz werden. — Da man hier nur eine Linie zu messen braucht; so ist diese Auflösung bey etwas großen Figuren, die man übersehen kann, den vorigen vorzuziehen. — Freylich läßt sie sich nicht überall, z. B. bey der Grundlegung der Waldungen, anwenden. — Der Riß auf dem Tischchen wird mit dem Cirkelfuß gezeichnet, damit die Linien recht fein werden. Da er während der Zeichnung leicht etwas schmutzig werden kann, so wird er hernach auf ein anderes Papier abgezeichnet. Man klebt nämlich denselben mit Mundleim auf ein Papier, und durchsticht mit einer feinen Nadel alle Hauptpunkte des Risses so, daß das untere Papier nicht durchstochen wird.

§. 217.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt einer gradlinichten Figur, die in Grund gelegt worden, auszurechnen.

Auflösung. Hier ist nichts weiter nöthig, als daß man die verkleinerte Figur durch Diagonallinien in Triangel theilt, jeden besonders ausrechnet, und diese Zahlen addiret.

§. 218.

§. 218.

Aufgabe.

Eine Fläche, die in krumme Linien eingeschlossen ist, in Grund zu legen.

Auflösung. Fig. 163. a sey ein Wald, dessen Umfang aus krummen Linien bestehet. Man stecke durch Stäbe a, b, c u. s. w. grade Linien so nah als möglich an den Umfang. Diese Linien und die Winkel an den Ecken werden gemessen, und daraus eine gradlinichte Figur gezeichnet. Hierauf werden von a, b, c u. s. w. die Entfernungen bis an den krummen Umfang gemessen, und in den Riß nach dem verjüngten Maaßstabe eingetragen, und durch ihre Endpunkte der Umfang der krummlinichten Figur gezeichnet.

§. 219.

Anmerkung.

Eben so verfährt man, wenn man einen Fluß mit seinen Krümmungen in Grund legen will, wie fig. 163 b. Längs dem Ufer her, werden die graden Linien ab, bc, cd u. s. w. und von a, b, c ꝛc. die Entfernungen bis an den Fluß gemessen und aufgezeichnet, worauf man die Krümme des Flusses zeichnen kann.

§. 220.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt einer krummlinichten Figur zu finden (fig. 163. a.)

Auflösung. Wenn die ganze Figur in Grund gelegt worden ist: so theile die gradlinichte Figur, welche die krumme umgiebt, durch

durch Diagonallinien in Triangel, und rechne dadurch den Flächeninhalt derselben aus. Hierauf müssen die kleinen viereckichten Flächen, wie abrs, welche zwischen den graden und krummen Linien liegen, besonders ausgerechnet, und von dem Inhalt der gradlinichten Figur abgezogen werden, wonach der Inhalt der krummlinichten Flächen übrig bleibt. Man kann, ohne einen beträchtlichen Fehler zu begehen, diese Vierecke als Parallelogrammen gelten lassen, wie abrs, wo die Länge ab und die Breite ar ist.

§. 221.

Aufgabe.

Eine Figur abcde, (fig. 164.) welche auf ein Papier gezeichnet worden, auf dem Felde nach dem großen Maaße auszustecken.

Auflösung. Bevestige das Papier mit dem Riß auf das Meßtischchen, und stelle es horizontal auf den Punkt A, der einer der Eckpunkte der großen Figur auf dem Felde seyn soll, so daß a auf dem Tischchen grade über A auf dem Felde liegt. Messe ab und ae nach dem kleinern Maaße, visire mit dem Diopternlineal an ab und ae hin, und lasse Stäbe nach diesen Richtungen stecken. Diese Linien mache nach dem großen Maaße so lang, wie ab und ae nach dem kleinen sind, und stecke Stäbe B und E an ihre Endpunkte. Nun ist ab : ae = AB : AE. Stecke einen Stab in A, und stelle das Tischchen in B, so daß der Punkt b über B und ba in der Linie BA liegt. Visire an bc hin, und mache eine Linie BC auf dem Felde so lang, als bc im Kleinen ist. Eben so verfahre an den übrigen Eckpunkten, bis die

ganze

ganze Figur ABCDE auf dem Felde ausgesteckt ist, welche der kleinen Figur abcde ähnlich ist. Man kann auch das Tischchen in A stehen lassen, die Linien ac und ad messen, und nach dieser Richtung die Linien AC, AD eben so lang nach dem großen Maase machen lassen.

Diese Aufgabe kann vorkommen, wenn nach einem vorher entworfenen Grundrisse, Gebäude, Anlagen in Gärten, Baumpflanzungen und dergleichen, oder Schanzen, Vestungen, Lager u. s. w. angelegt werden sollen.

---

§. 222.

Bisher haben wir gesehen, wie man Triangel und Figuren, die in Triangel getheilt worden, in Grund legen, und ihre Flächen ausrechnen kann, indem man in dem großen Triangel von sechs Stücken (nämlich seinen drey Seiten und drey Winkeln) drey Stücke messet, worunter wenigstens eine Seite seyn muß, entweder 1) eine Seite und zwey Winkel, oder 2) zwey Seiten und einen Winkel, oder 3) die drey Seiten, und hierauf mit dem verjüngten Maasstabe und Transporteur einen kleinen Triangel zeichnet, der dem großen Triangel ähnlich ist. Alsdann werden die Winkel in beyden Triangeln gleich seyn, und die Seiten in Proportion stehen.

Nach diesem Verfahren erhält man nur dann einen ganz genauen Riß von den großen Triangeln, wenn man sowohl bey der Messung der Linien und Winkel, als auch bey ihrer Aufzeichnung die größte Sorgfalt anwendet. Es kann aber leicht geschehen, daß man, wenn auch die Linien und Winkel auf dem Felde richtig

tig gemessen worden sind, 1) bey ihrer Aufzeichnung auf das Papier kleine Unrichtigkeiten begehet, die desto weniger bemerkbar sind, je kleiner die Figur ist, welche man entwirft: 2) oder daß man, indem man die Linien der kleinen Figur nach dem verjüngten Maasstabe messet, um aus der Grundlinie und Höhe die Fläche zu finden, diese etwas zu groß oder zu klein nimmt. Denn öfters sind die Instrumente nicht ganz richtig; oder das Auge ist nicht im Stande, die Grenzen der Linien, besonders bey sehr spitzen Winkeln so genau abzumessen, daß nicht einige Ruthen oder Schuhe zu viel oder zu wenig herauskommen. — Indessen behalten die geometrischen Abzeichnungen der Figuren im Kleinen dennoch ihren Werth, und sind öfters sehr nöthig. Nur ist dabey die größte Sorgfalt und Genauigkeit zu empfehlen, wenn man nach diesen Abzeichnungen die Größe der Flächen bestimmen will.

§. 223.

Wir wollen nun noch eine andere Methode kennen lernen, wie man mit Hülfe einer Tabelle und einer leichten Rechnung nach der Regel de Tri die unbekannten Stücke eines Triangels und seinen Flächeninhalt sehr genau finden kann, wenn man drey Stücke, worunter wenigstens eine Seite seyn muß, gemessen hat. Man nennet diese Berechnung der Triangel gewöhnlich die Trigonometrie.

Weil man dadurch die Fehler, welche sonst bey der Abzeichnung und Messung der Figuren zuweilen begangen werden, vermeiden kann: so muß sich jeder, der Genauigkeit liebt, auch mit dieser leichten trigonometrischen Methode bekannt machen.

§. 224.

§. 224.

Damit das Folgende desto verständlicher und überzeugender vorgetragen werden könne, wollen wir hier einige Sätze kurz wiederholen, welche im Vorhergehenden weiter ausgeführt worden sind.

1) Wenn fig. 165. eine Sehne oder Chorde cd in einem Kreise gezogen wird, so heißt der Winkel a, dessen Spitze in der Peripherie liegt, und dessen Schenkel ac und ad an die Endpunkte der Chorde cd gehen, der Winkel, welcher zur Chorde cd gehört.

2) Daher gehört zu einem Durchmesser, der die größte Chorde im Kreise ist, ein rechter Winkel (§. 92. fig. 79.) Zu einer kleinern Chorde als der Durchmesser, gehöret auf der einen Seite ein stumpfer, auf der andern ein spitzer Winkel (§. 92. fig. 84.) Diese beyde Winkel halten zusammen 180° oder sind zwey rechten Winkeln gleich.

3) Wenn also ein stumpfer oder spitzer Winkel, die mit ihren Spitzen in der Peripherie eines Kreises liegen, zusammen 180° halten: so stehen sie entweder auf einer und derselben Chorde (wie fig. 84., wo die Winkel a und b auf der cd stehen): oder die Chorden, worauf beyde stehen, sind gleich, (wie fig. 86., wenn fg = op, so sind Wfag + Woap = 180.) (§. 101.)

4) Jeder Tr. kann mit seinen drey Spitzen in die Peripherie eines Kreises gelegt werden (fig. 165. Siehe §. 141.) Nun sind die drey Seiten ac, cd, da Chorden im Kreise, und die gegenüberstehenden Winkel d, a, c sind die zu den Chorden gehörige Winkel.

§. 225.

Man hat willkührlich angenommen, daß der Durchmesser eines Kreises in 100,000 gleiche Theile, (welche wir schlechtweg Theilchen heißen wollen) getheilt sey, und darnach hat man berechnet, wie groß jede andere Chorde in demselben Kreise, die zu irgend einem Winkel gehört, sey. Es versteht sich von selbst, daß hier nichts auf die Größe des Kreises ankommt, in welchem man sich den Durchmesser und die andern Chorden gezogen denkt. Weil alle Kreise einander ähnlich sind; so müssen auch die Chorden, welche in zwey Kreisen von verschiedener Größe gezogen werden, wenn sie zu gleich großen Winkeln gehören, gegen die Durchmesser dasselbe Verhältniß haben. Gesetzt, fig. 165 und 166. der Tr. acd sey dem Tr. efg ähnlich, so daß Wa = We, Wc = Wf, Wd = Wg, und die Seite cd verhalte sich zum Durchmesser wie 1 : 2, so verhält sich auch fg zu dem Durchmesser des kleinen Kreises, wie 1 : 2. Oder ac verhalte sich zum Durchmesser wie 3 : 4, so verhält sich auch ef zum Durchmesser wie 3 : 4. Der Kreis mag daher groß oder klein seyn; so kann man ein bestimmtes Verhältniß angeben, in welchem jede Chorde zum Durchmesser steht. Wenn man also dem Durchmesser 100,000 gleiche Theilchen giebt; so kann man eine Tabelle entwerfen, in welcher stehet, wie viele solcher Theilchen jeder andern kleinen Chorde zukommen. Wir wollen dieses das trigonometrische Maas der Chorden nennen.

Daraus ist eine Chordentafel entstanden, wie diejenige, welche hier beygefügt ist, worin man die Winkel von 15 zu 15 Minuten bis

bis auf 90 Grade findet; also alle Winkel, die um Viertelsgrade verschieden sind. Nebenbey stehet die Länge der zu jedem Winkel gehörigen Chorde, in solchen Theilchen, wovon 100,000 auf den Durchmesser, als die Chorde des rechten Winkels, gehen.

Z. B. Da fig. 167. der Durchmesser bc, der als Chorde zu dem rechten Winkel bac gehört = 100,000 Theilchen; so kann man finden, wie groß die Chorde de in diesem trigonometrischen Maase ist, wenn man den gegenüberstehenden Wdae messet. Wenn z. B. Wdae = 40°, so stehet in der Tafel dabey 64279. Dieses ist das trigonometrische Maas von de. Das ist, bc : de = 100,000 : 64279.

Wenn man fig. 168. in dem stumpfwinkelichten Tr. bac den stumpfen Winkel a = 110° durch Messung gefunden hat, und man will daraus das trigonometrische Maas der Chorde bc suchen; so sucht man in der Chordentafel den spitzigen Winkel von 70°, der mit jenen zusammen 180° ausmacht. Man findet dabey 93969 Theilchen als das trigon. Maas der Chorde bc, welche, wie die Figur zeigt, zu dem stumpfen Winkel a = 110°, und dem spitzen Winkel d = 70° gehört.

Chordentafel.

Winkel	Chorde	Winkel	Chorde	Winkel	Chorde
15′	436	15′	12620	15′	24615
30′	873	30′	13053	30′	25038
45′	1309	45′	13485	45′	25460
1° —	1745	8° —	13918	15° —	25882
15′	2181	15′	14349	15′	26303
30′	2618	30′	14781	30′	26724
45′	3054	45′	15212	45′	27144
2° —	3490	9° —	15643	16° —	27554
15′	3926	15′	16074	15′	27983
30′	4362	30′	16505	30′	28401
45′	4798	45′	16935	45′	28820
3° —	5234	10° —	17365	17° —	29237
15′	5669	15′	17794	15′	29654
30′	6105	30′	18223	30′	30071
45′	6540	45′	18652	45′	30486
4° —	6976	11° —	19081	18° —	30902
15′	7411	15′	19509	15′	31316
30′	7846	30′	19937	30′	31730
45′	8281	45′	20364	45′	32144
5° —	8716	12° —	20791	19° —	32557
15′	9150	15′	21218	15′	32969
30′	9585	30′	21644	30′	33381
45′	10019	45′	22070	45′	33792
6° —	10453	13° —	22495	20° —	34202
15′	10887	15′	22920	15′	34613
30′	11320	30′	23344	30′	35021
45′	11754	45′	23769	45′	35429
7° —	12187	4° —	24192	21° —	35837

Winkel	Chorde	Winkel	Chorde	Winkel	Chorde
15′	36244	15′	48862	15′	60529
30′	36650	30′	49242	30′	60876
45′	37056	45′	49622	45′	61222
22° —	37461	30° —	50000	38° —	61566
15′	37865	15′	50377	15′	61909
30′	38268	30′	50754	30′	62251
45′	38671	45′	51129	45′	62592
23° —	39073	31° —	51504	39° —	62932
15′	39474	15′	51877	15′	63271
30′	39875	30′	52250	30′	63608
45′	40275	45′	52621	45′	63944
24° —	40674	32° —	52992	40° —	64279
15′	41072	15′	53361	15′	64612
30′	41469	30′	53730	30′	64945
45′	41866	45′	54097	45′	65276
25° —	42262	33° —	54464	41° —	65606
15′	42657	15′	54829	15′	65935
30′	43051	30′	55194	30′	66262
45′	43444	45′	55557	45′	66588
26° —	43837	34° —	55919	42° —	66913
15′	44229	15′	56280	15′	67237
30′	44620	30′	56641	30′	67559
45′	45010	45′	57000	45′	67880
27° —	45399	35° —	57358	43° —	68200
15′	45787	15′	57715	15′	68518
30′	46175	30′	58070	30′	68835
45′	46561	45′	58425	45′	69151
28° —	46947	36° —	58779	44° —	69466
15′	47332	15′	59131	15′	69779
30′	47716	30′	59482	30′	70091
45′	48099	45′	59832	45′	70401
29° —	48481	37° —	60181	45° —	70711

Winkel	Chorde	Winkel	Chorde	Winkel	Chorde
15′	71019	15′	80125	15′	87673
30′	71325	30′	80386	30′	87882
45′	71630	45′	80644	45′	88089
46° —	71934	54° —	80902	62° —	88295
15′	72236	15′	81157	15′	88499
30′	72537	30′	81412	30′	88701
45′	72837	45′	81664	45′	88902
47° —	73135	55° —	81915	63° —	89101
15′	73432	15′	82165	15′	89298
30′	73728	30′	82413	30′	89593
45′	74022	45′	82659	45′	89687
48° —	74314	56° —	82904	64° —	89879
15′	74606	15′	83147	15′	90070
30′	74896	30′	83389	30′	90259
45′	75184	45′	83629	45′	90446
49° —	75471	57° —	83867	65° —	90631
15′	75756	15′	84104	15′	90814
30′	76041	30′	84339	30′	90996
45′	76323	45′	84573	45′	91176
50° —	76604	58° —	84805	66° —	91355
15′	76884	15′	85035	15′	91531
30′	77162	30′	85264	30′	91706
45′	77439	45′	85491	45′	91879
51° —	77715	59° —	85717	67° —	92050
15′	77988	15′	85941	15′	92220
30′	78261	30′	86163	30′	92388
45′	78532	45′	86384	45′	92554
52° —	78801	60° —	86603	68° —	92718
15′	79069	15′	86820	15′	92881
30′	79335	30′	87036	30′	93042
45′	79600	45′	87250	45′	93201
53° —	79864	61° —	87462	69° —	93358

Winkel	Chorde	Winkel	Chorde	Winkel	Chorde
15′	93514	15′	97134	15′	99307
30′	93667	30′	97237	30′	99357
45′	93819	45′	97338	45′	99406
70° —	93969	77° —	97437	84° —	99452
15′	94118	15′	97534	15′	99497
30′	94264	30′	97630	30′	99540
45′	94409	45′	97723	45′	99580
71° —	94552	78° —	97815	85° —	99619
15′	94693	15′	97905	15′	99657
30′	94832	30′	97992	30′	99692
45′	94970	45′	98079	45′	99725
72° —	95106	79° —	98163	86° —	99756
15′	95240	15′	98245	15′	99786
30′	95372	30′	98326	30′	99813
45′	95502	45′	98404	45′	99839
73° —	95630	80° —	98481	87° —	99863
15′	95757	15′	98556	15′	99885
30′	95882	30′	98629	30′	99905
45′	96005	45′	98700	45′	99923
74° —	96126	81° —	98769	88° —	99939
15′	96246	15′	98836	15′	99953
30′	96363	30′	98902	30′	99966
45′	96479	45′	98965	45′	99976
75° —	96593	82° —	99027	89° —	99985
15′	96705	15′	99087	15′	99991
30′	96815	30′	99144	30′	99996
45′	96923	45′	99200	45′	99999
76° —	97030	83° —	99255	90° —	100000

§. 226.

Ob es gleich zu weitläuftig seyn würde, hier die Art und Weise vollständig zu erklären, wie die Chordentafel berechnet worden ist, oder wie man das trigonometrische Maas aller Chorden im Verhältnisse gegen den Durchmesser gefunden hat: so wollen wir doch an einigen Beyspielen sehen, wie dieses bewerkstelligt worden ist, damit die Entstehung der Chordentafel einigermasen begreiflich wird.

Wenn (fig. 169) ab die Seite des regulären Sechsecks ist, die dem Halbmesser gleich ist: so hält sie nach trigonometrischem Maase 50000 Theilchen. Da nun c der Centriwinkel des regulären 6 Ecks = 60° (§. 126.), so ist Wd = 30° (§. 87.) Auf diese Art hat man das trigonometrische Maas der Chorde gefunden, die zu dem Peripheriewinkel von 30° gehört.

abcd (fig. 110.) sey ein Quadrat im Kreise. Der Winkel acb = 90° (§. 92). Daher ist das Quadrat von ab = den beyden Quadraten von ac und cb zusammen (§. 119). ab als Durchmesser ist = 100000 Theilchen: sein Quadrat ist = 10000000000 Quadrat-Theilchen. Die Linien ac und bc sind gleich, also sind auch ihre Quadrate gleich. Das Quadrat von ac hält daher halb so viel, als das Quadrat ab, nämlich 5000000000 Quadrat-Theilchen. Die Quadratwurzel daraus ist 70710 Theilchen, als das trigonometrische Maas von ac. Diese Chorde gehört zu dem gegenüberstehenden Wadc = 45°.

Auf diese Art wird es einigermasen begreiflich, wie man mit Hülfe dieser und einiger andern Sätze aus der Geometrie die ganze Chordentafel berechnen konnte, deren Gebrauch nun weiter gezeigt werden soll.

§. 227.

§. 227.

Es ist schon erinnert worden, daß man sich um den Triangel bey allen hier vorkommenden Rechnungen einen Kreis denken muß, so daß die drey Seiten des Triangels Chorden sind. Will man das trigonometrische Maas derselben wissen: so meßt man die gegenüberstehende Winkel, sucht sie in der Chordentafel auf, und findet dabey das verlangte Maas.

Es sey (fig. 165.)

Wa = 50°, so ist cd = 76604 Theilchen.]
Wc = 60°, so ist ad = 86603 — —
Wd = 70°, so ist ac = 93969 — —

§. 228.

Dieses trigonometrische Maas allein ist aber nicht hinlänglich, um sich einen Begriff von der Größe dieser Linien in Ruthen, Schuhen und Zollen zu machen. Es dient nur dazu, um zu sehen, in welchem Verhältnisse die Linien gegen den Durchmesser und gegen einander selbst stehen. So verhalten sich nach unserm vorigen Beyspiel

cd : ad = 76604 : 86603 (beynahe wie 7 : 8).

Nachdem nun der Kreis, worin der Triangel liegt, groß oder klein ist, (wie es die Größe oder Kleinheit des Triangels erfordert), werden auch die 100000 Theilchen seines Durchmessers, und die 76604 Theilchen von cd, wie auch die 86603 Theilchen von ad, groß oder klein seyn. Das Verhältniß der Größe dieser Linien wird sich daher nicht ändern, der Kreis mag noch so groß oder noch so klein seyn.

Es ist also klar, daß man durch dieses Verhältniß der trigonometrischen Maase der Linien ac, cd, ad noch keinen Begriff von ihrer eigentlichen Größe in Ruthen, Schuhen und Zollen bekommen hat. — Ehe wir weiter gehen, wollen wir bemerken, daß das Maas einer Linie in Ruthen, Schuhen und Zollen das gemeine Maas derselben heißen soll, um es von dem trigonometrischen Maase unterscheiden zu können. Es ist übrigens in der Rechnung ganz einerley, ob man die Länge der Seiten im gemeinen Maase nach Rheinländischen, oder Altfranzösischen, oder Neufranzösischen, oder irgend einem andern Maase bestimmt.

Wir wollen hier zum gemeinen Maase immer das in der Geometrie gewöhnliche Decimalmaas gebrauchen, wo eine Ruthe = 10′, 1′ = 10″.

Wenn man die Aufgaben auflösen will, 1) aus dem trigonometrischen Maase der Seiten eines Tr. ihr gemeines Maas, 2) aus dem gemeinen Maase das Trigonometrische zu finden, (worin die ganze Trigonometrie bestehet): so muß man sich folgenden Hauptsatz merken.

§. 229.

Zwey Seiten eines Triangels verhalten sich in ihrem gemeinen Maase eben so gegeneinander, wie in ihrem trigonometrischen Maase.

Dieser Satz ist für sich klar. Denn da es angehet, dieselben Größen nach verschiedenen Maasen auszumessen: so muß das Verhältniß dieser Maase immer dasselbe bleiben. Z. B. wenn man das Verhältniß des Guldens zum

Thaler

Thaler (leichtes Geld) nach Kreuzern bestimmt: so ist dieses wie 60 : 90 oder wie 2 : 3. Bestimmt man es nach Batzen, so ist es wie 15 : 22 $\frac{1}{2}$, oder wie 30 : 45, oder ebenfalls wie 2 : 3. — Will man das Verhältniß des Thalers (sächsisch) zum alten Louisd'or nach Rthlr. bestimmen: so ist es wie 1 : 5. Bestimmt man es nach Groschen, so ist es wie 24 : 120, welches auch 1 : 5 ist.

Eben dieses muß auch von dem Verhältniß der Linien gelten, welche man mit kleinen Linien von verschiedener Größe ausmesset. Die Maaße müssen immer ein und dasselbe Verhältniß behalten.

§. 230.

Erste Aufgabe.

Wie findet man, wenn man die Winkel eines Tr. acd (fig. 165) gemessen, und aus der Chordentafel das trigonometrische Maas der gegenüberstehenden Seiten aufgesucht hat, auch das gemeine Maas dieser Seiten?

Auflösung. Messe hierauf eine Seite z. B. cd nach gemeinem Maase. Sie sey = 4′ 8″ oder 48″, und sage nach der Regel de Tri: das trigonometrische Maas von cd verhält sich zum trigonom. Maase von ad, wie das gemeine Maas von cd zu dem gemeinen Maase von ad.

(Oder wenn wir das erstere Maas durch t. M. und das letztere durch g. M. bezeichnen; so sagt man:

t. M. cd : t. M. ad = g. M. cd : g. M. ad)

76604 : 86603 = 48 : g. M. ad.

```
            48
         ------
         692824
        346412
        -------
76604)  4156944 | 5'4 2/7'' = ad im gem. M.
        383020  | oder 5'4, 26''.
        -------
         326746
         306416
        -------
          20330
```

Hieraus sieht man, daß wenn aus dem t. M. das g. M. gesucht wird, man ausser den Winkeln, auch wenigstens eine Seite messen muß, die einem gemessenen Winkel gegenüberstehet.

Um nicht irre zu werden, muß man jedesmal anschreiben, welche Seiten, sowohl in tr. als gemeinem Maase in Proportion stehen, und alsdann unter die drey ersten Glieder die zugehörige Zahlen setzen; denn die zum 4ten Glied gehörige Zahl wird hernach durch die Regel de Tri gefunden.

§. 231.

Zweyte Aufgabe.

Wie findet man, wenn man einige Seiten eines Tr. in g. M. gemessen hat, wie auch einen Winkel, der einer der gemessenen Seiten gegenüberstehet, das t. M. der Seiten, und dadurch die Größe der gegenüberstehenden Winkel?

Auflösung. Zuerst suche den gemessenen Winkel in der Chordentafel, wobey das t. M.

der

der ihm gegenüberstehenden Seite stehet. Hierauf gebraucht man die Regel de Tri, um auch das t. M. der andern gemessenen Seite zu finden. Sucht man endlich dieses in der Chordentafel: so findet man die Größe des einen unbekannten Winkels, und durch Abziehen der Summe der beyden bekannten Winkel von 180, auch den dritten.

Alles gründet sich wieder auf den Satz §. 228. Man darf nur ausser 2 Seiten einen Winkel messen, und das Verfahren des vorigen §. 229. umkehren.

Z. B. fig. 165. Es sey cd = 40′, ad = 54′, Wc = 60°. Also ist nach der Chordentafel ad im trigon. Maase = 86603. Also sagt man:

g. M. ad : g. M. cd = t. M. ad : t. M. cd.
54 : 40 = 86603 : t. M. cd.

```
           40
     ---------
54) 3464120 | 64150
    324     |
    ---
     224
     216
     ---
       81
       54
       ---
       272
       270
       ---
        20
```

Also ist 64149 das t. M. von cd, und gehört in der Chordentafel zu dem Winkel a = 39° 45′. Also ist Wd = 80° 15′.

Es ist schon erinnert worden, daß die ganze Trigonometrie in der Auflösung dieser beyden Auf-

Aufgaben besteht, indem man entweder das gemeine Maas der Seiten, oder die Größe der Winkel wissen will.

Die Anwendung wollen wir zuerst bey der Berechnung eines rechtwinkelichten, und hernach eines schiefwinkelichten, (spitz- oder stumpfwinkelichten) Triangels sehen, und bey beyden alle möglichen Fälle einzeln betrachten, und mit Beyspielen erläutern.

§. 232.

Von der Berechnung eines rechtwinkelichten Triangels.

Wir wollen um der Deutlichkeit willen die Winkel eines rechtwinkelichten Tr. abc (fig. 170.) mit den kleinen Buchstaben a, b, c, und die gegenüberstehenden Seiten mit A, B, C benennen, so daß Wa der Seite A, Wb der Seite B, und Wc der Seite C gegenübersteht.

Es sind hier vier Fälle möglich. Es können nämlich bekannt seyn:

1) Die beyden kurzen Seiten A und B.

2) Eine kürzere Seite A oder B, und ein spitzer Winkel a oder b.

3) Die Hypotenuse C und eine kürzere Seite A oder B.

4) Die Hypotenuse und ein spitzer Winkel a oder b.

§. 233.

Erster Fall.

A und B sind bekannt. Man sucht nun

1) Die Hypotenuse C, indem man die Quadrate von A und B addiret, welches das Qua-

Quadrat der Hypotenuse giebt (§. 119.) (Man erspart sich diese Rechnung, wenn man sich eine Tafel anschafft, worin die Quadrate aller Zahlen von 1 bis 10000 zu finden sind.)

Es sey z. B. das g. M. A = 40′, g. M. B = 30′
Das Quadrat von A = 1600 Quad. Schuhe
— — von B = 900 — —
— — von C = 2500 — —
Die Wurzel von C = 50′.

2) Sucht man den Wa.
G. M. C : g. M. A = t. M. C : t. M. A
50 : 40 = 100000 : t. M. A
5 : 4 = 100000
4
5) 400000 | 80000 = t. M. A.

Bey 80000 steht in der Chordentafel der Winkel von 53°.

3) Wb = 90 — Wa = 90 — 53 = 37°.

§. 234.
Zweyter Fall.

A (oder B) und a (oder b) sind bekannt. Wir wollen setzen B und a seyen gemessen worden. Nun werden gesucht:

1) Wb. Man ziehe nämlich den Wa von 90 ab.

2) Das gemeine Maas von A. Aus den bekannten Wa und b findet man nach der Chordentafel des t. M. von A und B, und weil man das g. M. von B weiß, so sagt man:

t. M. B : t. M. A = g. M. B : g. M. A.

3) Das g. M. C.

t. M. B : t. M. C = g. M. B : g. M. C

(oder man kann auch die Summe der Quadrate von A und B addiren, und daraus die Wurzel ziehen, ist = g. M. C.)

Zu No. 2. wollen wir einige Beyspiele setzen.

Erstes Beyspiel. Man soll auf dem Felde (fig. 170.) die Entfernung des Punktes b von dem Punkte c, wo man stehet (oder die Linie A) finden. Setze an c einen rechten Winkel, und messe willkührlich lang eine Linie B. Sie sey = 100°. Messe den Wa. Es sey 55° 30′. Also ist Wb = 34° 30′.

Nun suche darnach in der Chordentafel das t. M. A = 82413, und das t. M. B = 56641.

56641 : 82413 = 100 : g. M. A.

```
         100
       ________
56641) 8241300 | 145½° = g. M. A.
       56641
       ______
       257720
       226564
       ______
        311560
        283205
        ______
         28355
```

Zweytes Beyspiel. Wenn ab (fig. 171.) ein Gegenstand ist, dessen Länge man gemessen hat, so wie auch Wc, der grade vor der Mitte von ab liegt, so daß Tr. abc gleichschenkelicht ist, oder ac = bc: so kann man die Entfernung des Gegenstandes ab vom Punkte c, (oder das gemeine Maas von der Linie cd) finden. Denn in dem Tr. cdb sind bekannt, 1) die halbe Länge ab = db. 2) Wcdb

Wcdb ist ein rechter, weil cd senkrecht auf ab fällt, 3) W $\frac{1}{2}$ c, weil Wc gemessen worden ist. Also ist auch 4) Wb bekannt. Aus den Winkeln $\frac{1}{2}$ c und b suche das t. M. von db und cd, und da man das g. M. von db weiß, so kann man das t. M. cd durch die Regel de Tri ausrechnen.

Z. B. ab sey eine Mauer, 220′ lang, also $\frac{1}{2}$ ab = db = 110′. In dem Punkte c ist das Auge, welches die ganze Mauer ab übersehen kann. Man messe den Wc. Er sey einen halben Grad, oder 30 Minuten groß, also W $\frac{1}{2}$ c = 15′. Daher ist Wb 89° 45′. Daraus findet man in der Tafel, t. M. db = 436, t. M. cd = 99999.

```
436 : 99999 = 110 : g. M. cd.
         110
      ------
      999990
     99999
   ---------
436)10999890 | 25229,1′ ist die Entfernung
    872      |      von c nach d.
   -----
    2279
    2180
   -----
     998
     872
   -----
     1269
      872
    -----
      3970
      3924
     -----
        46
```

Drittes Beyspiel. A sey ein Thurm, dessen Höhe man wissen will (fig. 170.) Wir wollen annehmen, man könne eine Standlinie

B

B bis an den Fuß des Thurms messen. Sie sey $= 80'$ (wenn man die halbe Breite des Thurms dazu rechnet.) Messe den Wa. Er sey $= 60°$, also Wb $= 30°$. Diese geben das t. M. A $= 86603$, und t. M. B $= 50000$.

t. M. B : t. M. A = g. M. B : g. M. A

50000 : 86603 = 80 : g. M. A.

```
            80
        ---------
5000φ)  692824 | 138 ½′ ist die Höhe des Thurms, wozu man
        5000         noch die Höhe des Instruments rechnen
        ------       muß, womit Wa gemessen worden ist.
        19282
        15000
        ------
         42824
         40000
        ------
          2824
```

§. 235.

Dritter Fall.

C und A (oder B) sind bekannt. Es sey $C = 35'$, $A = 25$. Man sucht:

1) Wa. Suche das t. M. A. (Das t. M. C ist $= 100000$, weil C dem rechten Winkel c gegenüber stehet.)

g. M. C : g. M. A = t. M. C : t. M. A.

35 : 25 = 100000 : t. M. A.

7 : 5

```
              5
          --------
       7) 500000 | 71428 = t. M. A.
          ------
           10          Hierzu gehört
          ----
           30          Wa = 45°
          ----
            20         30′.
           ----
            60
           ----
             4
```

2)

2) Wb = 90 — Wa = 44° 30′.

3) Das g. M. B. Da der gegenüberstehende Wb = 44° 30′, so ist t. M. B = 70091.

t. M. C : t. M. B : = g. M. C : g. M. B.
100000 : 70091 = 35 : g. M. B.

```
          35
      ------
      350455
     210273
  ----------
100000) 2453185 | 24½′ = g. M. B.
```

Eine Anwendung davon ist Folgendes. Es seyen (fig. 175.) bn und nc Umfangslinien eines Polygons, die man gemessen hat. Nun will man vermittelst der Kreuzscheibe (wofern man keinen andern Winkelmesser bey der Hand hat) den Winkel a bestimmen. Man verlängert nc willkührlich nach d, setzt mit der Kreuzscheibe den Perpendikel db an, und messet db. Nun ist

g. M. bn : g. M. bd = t. M. bn : t. M. bd.

Dieses giebt Wx, und also auch Wa.

§. 236.

Vierter Fall.

C und Wa (oder Wb) seyen bekannt. Es sey C = 90′. Wa = 25°. Man suche:

1) Wb = 90 — Wa = 65°.

2) g. M. A. Der Wa giebt in der Tafel das t. M. A = 42262.

t. M. C : t. M. A = g. M. C : g. M. A.
100000 : 42262 = 90 : g. M. B.

```
              9
       ------
10000) 380358 | 38′ = g. M. A.
```

3)

3) g. M. B. Der Wb giebt in der Tafel das t. M. B = 90631.

$$100000 : 90631 = 9\varphi : \text{g. M. B.}$$

$$\frac{9}{10000)\ 815679\ |\ 81\tfrac{1}{2}' = \text{g. M. B.}}$$

§. 237.

Von der Berechnung der schiefwinkelichten Triangel.

Es können hier ebenfalls vier Fälle vorkommen: denn es können bekannt seyn:

1. Eine Seite und zwey Winkel.
2. Zwey Seiten und ein Winkel, der zwischen denselben liegt.
3. Zwey Seiten und ein Winkel, der nicht zwischen denselben liegt.
4. Drey Seiten.

§. 238.

Erster Fall.

(Fig. 172.) B. und die beyden Wa und c seyen gemessen worden. Suche:

1) Wb = 180 — (a + c.)

2) g. M. C. Suche aus dem Wb und c das t. M. von B und C, und sage:
t. M. B : t. M. C = g. M. B : g. M. C.

3) g. M. A. Suche aus den Winkeln b und a das t. M. von B und A, und sage:
t. M. B : t. M. A = g. M. B : g. M. A.

Erstes Beyspiel. Man habe auf dem Felde die Linie B gemessen. Sie sey = 100°.

Wir

Wir wollen annehmen, man könne an den Endpunkten a und c einen entfernten Gegenstand b sehen, und wolle die Entfernung von b nach c und a (oder die Linien A und C) ausrechnen. Man messe Wc und Wa. Es sey Wc = 67°, Wa = 32°, so ist Wb = 180 — (67 + 32) = 180 — 99 = 81°. — Man findet das t. M. von C = 92050. Da nun das g. M. B = 100 Ruthen, so ist

98769 : 52992 = 100 : g. M. A.

```
              100
98769)  5299200 | 53 2/3 ° g. M. A.
        493845
        ------
         360750
         296307
         ------
          64443
```

Eben so findet man das g. M. C.

98768 : 92050 = 100 : g. M. C.

```
              100
98768)  9205000 | 93 1/5 ° = g. M. A.
        888912
        ------
         315880
         296304
         ------
          19576
```

Zweytes Beyspiel. (fig. 158.) Man will die Höhe eines Gegenstandes ab wissen, an dessen Fuß man nicht kommen kann. Messe eine Standlinie cd = fg. Sie sey = 74'. Hierauf die Winkel bey f und g. Es sey Wn = 52°, Wy = 120°, Wx = 60°. Also Wo = 8°. Aus den Wo und Wn findet man t. M. fg = 13918, und t. M. fb = 78801.

```
13918 : 78801 = 74 : g. M. fb.
           74
        ------
        315204
       551607
        ------
13918) 5831274 | 419' = g. M. fb.
       55672   |
        ------
         26447
         13918
        ------
        125294
        125262
        ------
            32
```

Im rechtwinkelichten Tr. fhb findet man aus der Größe der Wm und x, das t. M. fb = 100000, und das t. M. hb = 86603.

```
100000 : 86603 = 419 : g. M. hb.
              419
         --------
           779427
          86603
         346412
         --------
100000) 36286657 | 362 4/5' = g. M. hb,
```

wozu noch ah = fc, als die Höhe des Instruments addirt werden muß.

§. 239.

Zweyter Fall.

(Fig. 173.) B und C und der dazwischen liegende Wa sollen bekannt seyn. Der Wa kann spitz oder stumpf seyn. Wir nehmen hier erstlich den Wa als spitz an.

Suche zuerst die Höhe des Triangels, nämlich bd. Weil bey d rechte Winkel sind, so sind

sind im Tr. adb alle Winkel bekannt. Wx = 90°. Es sey Wa = 56° 30′, so ist Wr = 33° 30′.

Aus den Wx hat man das t. M. C = 100000
— Wa — — t. M. bd = 83389
— Wr — — t. M. ad = 55194

Es sey das g. M. C = 60′.

10000φ : 83389 = 6φ : g. M. bd.
6
10000) 500334 | 50,03 = g. M. bd.

Ferner suche ad.

10000φ : 55194 = 6φ : g. M. ad.
6
10000) 331164 | $33\frac{1}{10}$ oder 33′ 1″ = g. M. ad.

B. ist bekannt. Es sey = 80′ 1″ Davon ziehe ad = 33′ 1″ ab, so bleibt cd = 47′.

Nun suche aus der Summe der Quadrate von bd und cd das Quadrat von A, und ziehe daraus die Wurzel, so hat man A.

bd = 500″ cd = 470″
Quad. bd = 250000 Quad. cd = 220900
Quad. A = 470900

Daraus die Quadratwurzel ist = 686″ = 68′ 6″ = A.

In dem Tr. dcb sucht man aus dem g. M. A und g. M. cd und dem t. M. A (welches dem rechten Wo gegenüberstehet, daß also sein t. M. = 100000 ist), das t. M. cd, woraus sich der Ws ergiebt.

686″

686″ : 470″ = 100000 : t. M. cd.

```
              470
686) 47000000 | 68513 = t. M. cd.
     4116
     ----
      5840
      5488
      ----
       3520
       3430
       ----
        900
        686
        ---
        2140
        2058
        ----
          82
```

Zu 68513 gehört der Ws = 43° 15′
Weil nun der Wr = 33° 30′

so ist der Wb = 76° 45′
Da der Wa = 56° 30′

133° 15′
Dies abgezogen von 179° 60′

so ist der Wc = 46° 45′

Aus diesem Beyspiel erhellet, wie man in einem Triangel, worin zwey Seiten und ein Winkel, der dazwischen liegt, gemessen worden sind, die Höhe bd, und dadurch den Flächeninhalt des Tr. finden kann.

B ist = 801″
bd ist = 500″

400500 Die Hälfte ist 200250 Quad. Zoll, die Fläche des Triang. abc.

Dies macht 20 Quad. Ruthen, 2 Quad. Schuh, 50 Quad. Zoll.

Wenn

Wenn (fig. 174.) der Perpendikel bd ausserhalb des Tr. abc auf die verlängerte Grundlinie fällt: so wird die Rechnung auf dieselbe Art geführt, wie vorher. Weil C, B bekannt sind, und bey d ein rechter Winkel: so suche im Tr. adb das g. M. bd.

t. M. C : t. M. bd = g. M. C : g. M. bd

Ferner suche das g. M. ad.

t. M. C : t. M. ad = g. M. C : g. M. ad

Nun ist ad — ac = cd.

Quad. cd + Quad. bd = Quad. A.

Die Wurzel aus Quad. A giebt A.

Ferner: g. M. A : g. M. cd = t. M. A : t. M. cd. Also hat man Ws, und Wb — Ws = Wr. Endlich 180 — (Wa + Wr) = Wacb.

Auch den Flächeninhalt des Tr. abc findet man, wenn man $\frac{1}{2}$ ac mit bd multipliciret. — Wenn man statt der Buchstaben Zahlen setzet: so kann man dieses Beyspiel wie das vorige berechnen.

Nun ist noch der Fall zu betrachten übrig, wenn (fig. 175.) der bekannte Wa stumpf ist, der zwischen den bekannten Seiten B und C liegt. Nun ist sein spitzer Nebenwinkel x bekannt, und man hat im Tr. bdn alle Winkel und die Seite bn oder C. Suche die Höhe bd, welche ausserhalb des Tr. abc fällt.

T. M. C : t. M. db = g. M. C : g. M. bd. Ferner suche dn.

T. M. C : t. M. dn = g. M. C : g. M. dn. Addire dn zu B. Ziehe aus der Summe der Quadrate von dc und bd die Wurzel, dies giebt A.

Ferner: g. M. A : g. M. bd = t. M. A : t. M. bd.

Dies giebt den Wc, und also auch Wr, wenn man a + c von 180 abziehet.

§. 240.

Zur Erläuterung der §§. 237 und 238. wollen wir noch ein Beyspiel hersetzen, das bey dem Feldmessen sehr häufig vorkommt.

Wenn man (fig. 176.) die Entfernung zweyer Orte a und b wissen will, ohne an einen von beyden kommen zu können, oder wie öfters der Fall ist, wegen der Länge der Linie ab dieselbe nicht messen mag; so messet man eine Standlinie cd, die nicht allzukurz ist, und in einer solchen Lage gegen ab, daß die Winkel bey c und d nicht zu spitz werden. Darauf werden die w, o, x, n, m gemessen, wodurch man auch die Wr und s erfährt. Alsdann sucht man:

1) im Tr. bcd aus der Seite cd, und den Wo und Wn + m die Seite bd (§. 237.)

2) im Tr. acd aus der Seite cd und den Wn und Wo + x die Seite ad (§. 237.)

3) ab (§. 238.) im Tr. adb aus den Seiten ad und bd, und den dazwischen liegenden Wm die Seite.

Zum Beyspiel, es sey cd = 500′, Wo = 30°, x = 80°, n = 40°, m = 60°. Da nun n + m + o = 130°, so ist s = 50°. Aus Ws und o findet man das t. M. cd = 76604, und t. M. db = 50000.

76604 : 50000 = 500 : g. M. db.

```
          5    00
76604)  25000000 | 326 1/3' = g. M. db.
        229812
        ------
         201880
         153208
         ------
          486720
          459624
          ------
           27096
```

Da Wo + x + n = 150°, so ist Wr = 30°. Aus den Wr und Wo + x (oder, weil dieser stumpf ist, aus seinem Ergänzungswinkel zu 180, welcher = 70°) findet man t. M. cd = 50000, t. M. da = 93969.

50000 : 93969 = 500 :
oder 100 : 93969 = 1 : g. M. da.
giebt 939 2/3' = g. M. da.

Nun suche in Tr. adb die Höhe bg, aus Wbgm = 90° und Wm ist das t. M. db = 100000, t. M. bg = 86603.

```
100000 : 86603 = 326 1/3 : g. M. bg.
     3           -------
------             979
300000

             86603
               979
            ------
            779427
           606221
          779427
          --------
300000)   84784337 | 282 2/3' = g. M. bg.
          600000
          -------
          2478433
          2400000
          -------
            784337
            600000
            ------
            184337
```

Ferner: t. M. db : t. M. gd = g. M. db : g. M. gd.

$$100000 : 50000 = 326\tfrac{1}{3}$$

$$2 : 1 \quad 6)\,979 \mid 163' = \text{g. M. gd.}$$

3		37
6		19
		1

$$\text{ba} - \text{gd} = 939\tfrac{2}{3} - 163 = 776\tfrac{2}{3} = \text{ag.}$$

$$\text{Quad. ag} = \frac{5428900}{9}$$

$$\text{Quad. bg} = \frac{719104}{9}$$

$$\text{Quad. ab} = \frac{6148004}{9}$$

$$\text{Also ab} = \frac{2479}{3} = 826\tfrac{1}{3}'.$$

§. 241.

Dritter Fall.

(Fig. 172.) A und B sind bekannt, und ein Wb, der nicht zwischen ihnen liegt. Suche:

1) Aus Wb das t. M. B, und nun t. M. A, denn

g. M. B : g. M. A = t. M. B : t. M. A,

hieraus den Wa in der Chordentafel.

2) Wc, da wo Wa + b von 180 abgezogen werden.

3) Das g. M. C. Denn

t. M. B : t. M. C = g. M. B : g. M. C.

Z. B. Es sey B = 120', A = 130', Wb = 12°.

```
120 : 130 = 20791 : t. M. A.
             13
           -----
           62373
          20791
         ------
     12) 270283 | 22523 = t. M. A.
         30
         --
          62
          --
           28
           --
            43
            36
            --
             7
```

```
Zu 22523 gehört Wa = 13°
                Wb = 12
                ------
                     25°
      abgezogen von 180
                ------
                Wc = 155°
```

Aus dem Ergänzungswinkel 25° findet man das t. M. C = 42262

```
20791 : 42261 = 120 : g. M. C.
         120
      ---------
        845240
       42262
      --------
20791) 5071440 | 243 oder wegen des großen
       41582           Bruchs fast 244' = C.
      --------
        91324
        83164
      --------
         81600
         62373
      --------
         18227
```

§. 242.

Vierter Fall.

(Fig. 167. *) Die drey Seiten ab, bc, ac sind bekannt. Man will daraus die Winkel des Tr. abc berechnen.

Man denke sich mit der kleinsten Seite bc aus b einen Kreis beschrieben, der durch c, e, f geht. Also ist ag = ab + bc, und af = ab — bc. (Daher sind ag und af bekannt.)

Nun ist Tr. acg ∽ Tr. afe. Denn 1) der Winkel bey a ist gemeinschaftlich. 2) W aef = W agc (da W cef + W agc = 180° (§. 224. n. 3.), und W cef + W aef = 180° als Nebenwinkel.)

Aus der Aehnlichkeit dieser Triangel folgt, daß

$$ac : ag = af : ae$$

oder $ac : (ab + bc) = (ab - bc) : ae$.

Hat man ae, so ist auch ce = ac — ae bekannt; und da der Perpendikel bd die Sehne ec halbirt (§. 136.), so hat man $\frac{1}{2}$ ce = cd, und ad = ae + ed.

Nun sucht man in den beyden rechtwinkelichten Triangeln abd und cbd die Winkel.

Es sey	bc = 8 Fuß		
	ab = 10 —		
	ac = 12 —	(zwey Seiten zu-
so ist	ag = 18 —	sammen größer, als
	af = 2 —	die dritte.)

also 12 : 18 = 2 : 3, das ist, ae = 3′.

Daher ce = ac — ae = 12 — 3 = 9′.

cd = ed = $\frac{9}{2}$′

ad = ae + ed = 3 + $\frac{9}{2}$ = $\frac{15}{2}$′.

Nun

Nun ist

g. M. ab : g. M. ad = t. M. ab : t. M. ad

10 : $\frac{15}{2}$ = 100000 : 75000

Daher Wabd = 48° 30′

Wbac = 41° 30′.

Ferner: g. M. cb : g. M. ed = t. M. cb : t. M. cd

8 : $\frac{9}{2}$ = 100000 : 56250

Daher Wcbd = 34° 15′

Wacb = 55° 45′

Da Wcbd + Wabd = Wabc, so ist dieser = 82° 45′.

Diese Aufgabe findet unter andern ihre Anwendung, wenn man aus den gemessenen Seiten eines Vielecks die Winkel ohne Instrumente bestimmen will, indem man, wie §. 235. gezeigt wurde, eine Seite verlängert, und auswendig an der Figur einen stumpf- oder spitzwinkelichten Triangel bildet, aus dessen gemessenen Seiten man die Winkel nach der so eben vorgetragenen Weise finden kann.

§. 243.

Anmerkung.

Man kann nach dieser vorgetragenen Methode die Fläche einer jeden gradlinichten Figur, z. B. eines Waldes, um welchen man die Umfangslinien und Winkel gemessen hat, ausrechnen, wenn man die ganze Figur in Triangel theilt, und jeden Tr. besonders trigonometrisch berechnet, worauf man die Flächen derselben addiret. Wer das Vorhergehende verstanden hat, dem wird es nicht schwer fallen, sich

selbst

selbst als Beyspiel eine solche Figur vorzuzeichnen, und ihre Fläche auszurechnen. Man findet den Inhalt gewiß genauer, als wenn man in der kleinen Figur, die der großen ähnlich gezeichnet worden ist, die Höhen und Grundlinien des Tr., worin die Figur getheilt worden ist, nach dem verjüngten Maasstabe messet, und aus ihnen die Fläche berechnet. Daher ist die Trigonometrie für jeden, der sich mit Auffindung des Flächeninhalts der gradlinichten Figuren beschäftigt, sehr wichtig und nothwendig.

§. 244.

Zum Beschluß will ich noch zeigen, wie man mit Hülfe der Chordentafel, und eines verjüngten Maasstabes, der in 1000 gleiche Theile getheilt ist (wie man sie gewöhnlich in allen Reißzeugen findet) zwey Aufgaben genauer auflösen kann, als mit dem halbcirkelförmigen Transporteur. Man kann damit nämlich 1) einen Winkel auf dem Papier messen, 2) einen Winkel, dessen Grade und Minuten gegeben sind, auf das Papier auftragen.

1) Wenn (fig. 177.) ein Winkel a gemessen werden soll, so fasse 500 Theile des tausendtheiligen Maasstabes mit dem Cirkel, trage sie von a auf den einen Schenkel bis c, ziehe aus c einen Kreis, der die Schenkel des Wa in b und d schneidet: ab ist der Durchmesser. Ziehe die Chorde bd, welche dem Peripherie-Winkel a gegenüber stehet. Messe bd auf dem Maasstabe, suche das Maas in der Chordentafel, so stehet die Größe des Wa dabey.

Es ist zu merken, daß, weil in der Chordentafel der Durchmesser = 100000, und

und darnach alle Chorden berechnet worden sind: aber der Maaßstab um der Bequemlichkeit willen nur = 1000, also auch ab nur = 1000: so müssen auch bey den andern Zahlen für die Chorden zwey Ziffern von der rechten zur linken weniger gerechnet werden, als in der Tafel stehen. Ist Wdab stumpf, welcher gemessen werden soll (fig. 178.), so wird der eine Schenkel ad, der den Cirkel nicht schneidet, auf der andern Seite bis nach e verlängert, und die Chorde be gezogen. Diese zeigt nicht nur die Größe des spitzen Weab, sondern auch des stumpfen Wdab, weil sie Nebenwinkel sind.

Exempel zu fig. 177. Es sey bd = 500. Suche in der Tafel 50000, wozu W 30° gehört. Also ist Wa = 30°.

Exempel zu fig. 178. Es sey eb = 856. Suche in der Tafel diejenige Zahl, welche 85600 am nächsten kommt. Diese ist 85716, und der dazu gehörige W ist 59°. Also ist Weab = 59°, und Wdab = 121°.

2) Wenn man (fig. 177.) an den Punkt a der Linie ab einen in Graden und Minuten gegebenen Winkel ansetzen soll, welcher spitz ist: so trägt man wieder vom Maasstabe 500 von a nach c, und zieht einen Kreis. Hierauf sucht man in der Chordentafel diejenige Chorde, welche zu dem aufzutragenden Winkel gehört, schneidet zwey Ziffern zur Rechten ab, nimmt diese Chorde auf dem Maasstabe, trägt sie von b nach d, und ziehet die Linie da. Alsdann ist der Wdab derjenige, welcher gezeichnet werden sollte.

3. B.

Z. B. der gegebene Winkel sey = 36°, so wird bd = 587 gemacht.

Ist ein stumpfer Winkel gegeben, der an a (fig. 178.) gesetzt werden soll, so zeichnet man wieder einen Kreis, und trägt die zu dem Nebenwinkel gehörige Chorde von b nach e, ziehet die Linie ead, so ist dab der verlangte Winkel.

Z. B. Wdab soll = 140° gemacht werden. Sein Nebenwinkel ist = 40°. Dazu gehört als Chorde = 642. So lang wird be gemacht, so ist Weab = 40°, und Wdab = 140°.

Fünftes Kapitel.

Von den Körpern und ihrer Ausmessung.

§. 245.

Die Körper werden in der Geometrie blos nach der Größe des Raums betrachtet den sie einnehmen: andere Eigenschaften derselben, z. B, ihr Gewicht, ihre Materie u. dergl. werden in der Naturlehre und Naturgeschichte untersucht. Die Körper werden in eckichte und runde eingetheilt. Die Oberfläche der erstern ist aus lauter ebenen Flächen zusammengesetzt; die der letztern ist gekrümmt, entweder ganz (wie bey der Kugel), oder zum Theil, (wie bey einer Halbkugel). — Die eckichten haben wenigstens vier Flächen zu Grenzen, (denn drey Flächen können keinen körperlichen Raum einschliesen). Die Kanten eines solchen Körpers sind die Durchschnitte jedes Paars der einschliesenden Ebenen. — Eine Ecke, oder ein körperlicher Winkel heißt, was zwischen den ebenen Winkeln gegen den Punkt zu enthalten ist, wo mehrere Kanten zusammentreffen. Die ebenen Winkel, welche die Ecke einschliesen, heißen die Seiten derselben. Zwey Seiten geben keine Ecke, sondern nur eine Kante. Eine Ecke ist entweder dreyseitig, oder vierseitig, oder vielseitig. — Die wichtigsten Körper für den Geometer sind: 1) das Prisma, 2) der Cylinder

der (oder die Walze), 3) die Pyramide, 4) der Kegel, 5) die Kugel.

§. 246.

Ein Prisma ist ein eckichter Körper, der allenthalben (oben, in der Mitte, und unten) gleiche Dicke und Gestalt hat, wie z. B. die meisten Säulen, Balken ꝛc. Seine beyden Grundflächen sind also gradlinichte Figuren, die mit einander parallel liegen, und gleich sind (sich decken würden, wenn sie auf einander gelegt würden). Alle Durchschnitte des Prisma's, parallel mit den Grundflächen, sind diesen gleich. — Die Seitenflächen des Prisma's sind so viele Parallelogramme, als die Grundfläche Seiten hat.

§. 247.

Die Prismata werden eingetheilt in dreyeckichte, viereckichte, und vieleckichte (zu welchen letztern alle gehören, deren Grundflächen 5, 6, und mehrere Ecken haben.) Ferner werden sie eingetheilt in 1) senkrechte und 2) schiefe, je nachdem die Seitenlinien mit den Grundflächen rechte oder schiefe Winkel bilden. Fig. 179 ist ein senkrechtes, fig. 180 ein schiefes Prisma.

§. 248.

Man kann sich die Entstehung des Prisma's so vorstellen, als würde auf eine gradlinichte Figur (wie Tr. abc (fig. 179 und 180) eine Linie von b nach d unter einem gewissen Winkel angesetzt, und diese Figur (Tr. abc oder eine 4, 5 und mehr seitige) so an der Linie bd

fort-

fortgeschoben, daß sie immer in derselben Lage bliebe (oder daß alle Lagen derselben unter sich parallel wären.) Würde der von der Figur durchlaufene Raum als ein Körper angesehen, so ist er ein Prisma. — Die Höhe eines Prisma's ist eine senkrechte Linie von einer Grundfläche zur andern.

§. 249.

Wenn die Grundflächen des Prisma's Parallelogrammen sind, so heißt es ein Parallelepipedum. (fig. 181.)

Es ist von sechs Parallelogrammen als Seiten und Grundflächen begränzt, wovon je zwey gegenüberstehende einander gleich sind und parallel liegen, und die Durchschnitte, die parallel mit der Grundfläche geführt werden, sind dieser gleich, also auch Parallelogrammen.

§. 250.

Wenn ein senkrechtes Parallelepipedum von sechs gleichen Quadraten eingeschlossen ist: so ists ein Cubus oder Würfel. (Fig. 182.) Seine Länge, Breite und Höhe sind also gleich.

Ein dreyeckichtes Prisma hat 9 Kanten und 6 dreyseitige Ecken. Ein viereckichtes Prisma hat 12 Kanten (welche bey dem Würfel alle gleich sind) und 8 Ecken. (Bey einem senkrechten Parallelepipedum, also auch bey dem Würfel sind diese gleich, weil jede von drey rechtwinkelichten Seiten eingeschlossen ist).

§. 251.

Zur Ausmessung des Inhalts der Körper gebraucht man ein Maas, das von eben der

Art

Art ist: also muß es auch ein Körper seyn, (so wie man Flächen mit kleinen Flächen, und Linien mit kleinen Linien ausmesset.) Zu diesem Maaße ist der Würfel am bequemsten. Ein Würfel, dessen Länge, Breite und Höhe, eine Ruthe, oder einen Schuh, oder einen Zoll lang ist, heißt eine Cubikruthe, ein Cubikschuh, ein Cubikzoll. (Man gebraucht bey der Ausmessung der Weltkörper, z. B. der Erde, auch Cubik-Meilen, also Würfel, die eine Meile lang, breit und hoch sind.) Fragt man nach der Größe eines Körpers (nämlich seines Inhalts): so will man wissen, wie viele Cub. Ruthen, Schuhe und Zolle in den Raum gelegt werden können, den er einnimmt.

§. 252.

Aufgabe.

Eines Würfels (fig. 183.) körperlichen Inhalt auszurechnen.

Auflösung. Messe eine Seite desselben, z. B. ab, multiplicire sie mit sich selbst, und das Produkt noch einmal mit ab. — Es sey ab = 3′, so ist der Inhalt des Körpers 3. 3. 3 = 27 Cub. Schuh.

Beweis. Durch das Multipliciren der Seite ab mit sich selbst hat man die Zahl der Quadratschuhe erhalten, die die Grundfläche abcd enthält, nämlich 9 Quadratschuhe. Da aber ae = ab, also auch ae = 3′: so stehen auf jedem der 9 Quadratschuhe der Grundfläche drey Cubikschuhe übereinander. Es sind also 9 kleine viereckichte Säulen, deren jede 3 Cubikschuhe enthält. Daher muß man das Produkt 9 noch einmal mit 3 multipliciren, um

den

den ganzen körperlichen Inhalt des Würfels zu erfahren.

§. 253.

Da eine geometrische Ruthe in die Länge = 10′, eine Quadratruthe 100 Quad. Schuhe, so ist eine geometrische Cubikruthe = 1000 Cubikschuhe. Eben so ist ein Cubikschuh = 1000 Cubikzolle, und ein Cub. Zoll = 1000 Cubiklinien. — Es ist also leicht, eine Zahl von Cub. Ruthen in Cub. Schuhe, und diese in Cub. Zolle zu verwandeln, wenn man nur jedesmal mit 1000 multiplicirt, (das ist, wenn man jedesmal 3 Nullen zur Rechten anhängt.) Z. B. 24 Cub. Ruthen sind = 24000 Cubikschuhe, und diese sind 24000000 Cub. Zolle. —

Eben so leicht läßt sich eine Zahl von Cub. Zollen in Cubikschuhe, und diese in Cub. Ruthen verwandeln, wenn man jedesmal mit 1000 dividiret, (das ist, von der Rechten zur Linken 3 Ziffern abschneidet.) Z. B. 2876493 Cub. Zolle sind = 2° 876′493″. — Durch diese Decimaleintheilung erspart man also das Multipliciren und Dividiren.

§. 254.

Aufgabe.

Die Fläche welche einen Würfel umgiebt, im Quadratmaas zu finden.

Auflösung. Rechne eine Seite aus, und multiplicire diese mit sechs. Z. B. In der 183. Figur ist abcd = 9 Quadratschuhe, also der ganze Umfang des Würfels = 6. 9 = 54 Quadratschuhe.

§. 255.

Anmerkung.

Diese Aufgabe kann vorkommen, wenn man wissen will, wie viel Holz oder Blech man zu einem Cubikförmigen Kasten oder einer Büchse braucht.

§. 256.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines senkrechten Parallelepipedums (fig. 184.) zu finden.

Auflösung. Messe die Länge, Breite und Höhe, und multiplicire sie mit einander. Z. B. ab = 4′, ac = 3′, ae = 5′, so ist der Inhalt 60 Cubikschuhe.

Beweis. Auf jedem Quadratschuh der Grundfläche abcd steht eine viereckichte Säule, die 5 Cubikschuhe hält, weil die Höhe ae = 5′. Also müssen die 12 Quadratschuhe der Grundfläche mit 5 multipliciret werden.

§. 257.

Anmerkung.

Die Aufgabe kommt bey der Körpermessung häufig vor, z. B. bey Ausrechnung des Inhalts von Mauern, Säulen, Balken, Kasten, Stuben, Kellern, aufgesetzten Klaftern Holz und dergl. Gesetzt, die Klafter Holz ist breit 6′, hoch 6′, und die Länge der Scheiter 4′, so hält sie 4. 6. 6 = 144 Cubikschuhe. — Eine andere sey breit 9, hoch 6, die Länge der Scheiter 4, so ist der Inhalt = 9. 6. 4 = 216 Cubikschuhe. Die erste verhält sich zur andern, wie 144 : 216, oder (wenn man beydes mit 72 dividirt) wie 2 : 3.

§. 258.

§. 258.

Lehrsatz.

Ein senkrechtes und schiefes Parallelepipedum (fig. 184.) von gleicher Grundfläche und Höhe sind auch in Ansehung ihres körperlichen Inhalts gleich.

Beweis. Man stelle sich vor, beyde Körper würden in unzählig viele Scheibchen geschnitten, die alle parallel mit der Grundfläche lägen, und unendlich dünne wären: so würde die Zahl der Scheibchen in beyden Körpern gleich groß seyn, weil sie gleich hoch sind. Alle Scheibchen unter sich würden auch einander gleich seyn, wenn sie gleiche Dicke haben, und alle parallel mit der Grundfläche liegen sollen, da die Grundflächen beyder Körper gleich sind.

§. 259.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines schiefstehenden Parallelepipedums auszurechnen.

Auflösung. Messe die Grundfläche und die Höhe, (eine senkrechte Linie von einer Grundfläche auf die andere), und multiplicire sie mit einander. (§. 256.) (In welchem Sinne Produkte aus Linien dienen können, Flächen vorzustellen, und Produkte aus einer Fläche in eine Linie, um einen körperlichen Raum vorzustellen, ist im §. 152. ausgeführt worden).

§. 260.

Aufgabe.

Den Inhalt eines dreyeckichten Prisma's zu berechnen. (fig. 179.)

Auflösung. Rechne den Triangel aus, der die Grundfläche ausmacht, und multiplicire diese mit der Höhe. Der Beweis ist wie bey dem viereckigten Prisma.

§. 261.

Anmerkung.

Man soll (fig. 185.) den Inhalt eines Gebäudes nebst dem Raume unter dem Dache (woran die Giebel senkrecht stehen) ausrechnen. Hier muß der untere Theil des Gebäudes als ein Parallelepipedum, der Raum unter dem Dache aber als ein dreyeckichtes Prisma angesehen werden. Es sey ag = 100′, ab = 60′, bc = 80′, so ist das untere Gebäude = 100. 60. 80 = 480000 Cubikschuhe. — Weil ab = ce = 60′, so ist $\frac{1}{2}$ ce = de = 30′, ferner sey df = 40′, und ek = ag = 100. Also ist der Raum unter dem Dache = 30. 40. 100 = 120000 Cubikschuhe. Zusammen 600000 Cubikschuhe, oder 600 Cub. Ruthen.

§. 262.

Anmerkung.

Auch hier gilt der Satz, daß ein dreyeckichtes, (oder vieleckichtes) schiefstehendes Prisma, von gleicher Grundfläche und Höhe mit einem senkrechten, im körperlichen Inhalte diesem gleich ist.

§. 263.

Aufgabe.

Den Inhalt eines vieleckichten Prisma's zu finden.

Auflösung. Theile die Grundfläche durch Diagonallinien in Triangel, und rechne sie

(nach

(nach §. 154.) aus. Hierauf multiplicire sie mit der Höhe. Dieses kann z. B. bey vielseitigen Säulen statt finden. — Man kann sich also vorstellen, als würde ein solches vielseitiges Prisma durch Schnitte, welche durch die Diagonalen der Grundfläche gelegt werden, in lauter dreyeckichte Prismata getheilt.

§. 264.

Aufgabe.

Die Fläche, welche ein jedes Prisma umgiebt, im Quadratmaas zu finden.

Auflösung. Multiplicire den Umfang der Grundfläche mit der Höhe. Dieses giebt die Seitenflächen. Denn die Seiten der Grundfläche sind die Grundlinien der Seitenflächen. Diese müssen alle zusammen mit der Höhe multiplicirt werden. Hierauf werden die beyden Grundflächen besonders ausgerechnet, und dazu addiret.

Ist der Körper ein Parallelepipedum, wo die gegenüberstehenden Flächen gleich sind: so kann man nur 3 Flächen ausrechnen, sie addiren, und die Summe doppelt nehmen.

Z. B. fig. 184. ist	abcd =	12	Quad. Schuhe
	acfe =	15	— —
	cdgf =	20	— —
		47	
		2	
Die ganze Fläche		94	Quad. Schuhe.

Wollte man ausrechnen, wie viele Quadrat-Schuhe Tapeten man brauchte, um die Wände eines Zimmers zu tapeziren: so würde der Um-

fang des Zimmers mit seiner Höhe multiplicirt, da man die Fläche des Bodens und der Decke nicht auszurechnen braucht.

Z. B. Länge = 20′ Breite = 15′
also Umfang = 70′
Höhe = 10′

Fläche der 4 Wände des Zim. = 700 Quad. Sch., wovon noch die Flächen der Fenster und Thüren abgezogen werden müssen.

§. 265.

Zu den Prismatischen Körpern kann man den Cylinder (oder die Walze) rechnen, welche aber zu Grundflächen keine eckichte Figuren, sondern zwey gleiche Kreise hat, die parallel liegen (fig. 186.) Der Cylinder ist auch allenthalben gleich dick, und alle mit der Grundfläche parallelen Durchschnitte sind Kreise, die ihr gleich sind. Um ihn herum gehet eine krumme Fläche. Die Linie dc, welche die Mittelpunkte der beyden Grundflächen d und c mit einander verbindet, heißt die Axe des Cylinders. Steht diese senkrecht auf der Grundfläche: so ist der Cylinder ein senkrechter: sonst aber ein schiefer. — Bey dem erstern ist die Axe die Höhe, bey dem letztern eine senkrechte Linie von der obern Grundfläche auf die untere.

Die krumme Oberfläche des Cylinders ist so beschaffen, daß jede mit der Axe cd parallele Linie ae ganz in sie fällt, wenn sie die Peripherien der beyden Grundflächen berührt.

§. 266.

Man kann sich die Entstehung des Cylinders auf ähnliche Art, wie bey dem Prisma vor-

vorstellen, so daß nämlich ein Kreis an einer Linie cd fortbewegt würde, ohne seine Neigung gegen diese Linie zu ändern. — Bey einem senkrechten Cylinder kann man sich auch denken, als würde ein Parallelogramm acdc um eine feststehende Seitenlinie cd im Kreise herumbewegt. Der durchlaufene Raum ist Cylinderförmig. Aehnliche Cylinder sind, deren Axen gleiche Neigung gegen die Grundflächen, und einerley Verhältniß gegen die Durchmesser haben.

§. 267.

Da man jeden Kreis als ein reguläres Polygon von unzählig vielen Seiten ansehen kann (§. 163.); so kann man auch den Cylinder als ein Prisma ansehen, dessen Grundfläche unzählig viele Seiten hätte.

§. 268.

Was also vom Prisma gilt, gilt auch von dem Cylinder, daß nämlich ein schiefstehender gleichen Inhalt mit einem senkrechten Cylinder hat, wenn sie beyde gleiche Grundfläche und Höhe haben.

§. 269.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Cylinders zu finden.

Auflösung. Multiplicire die Grundfläche mit der Höhe. Da nun die Grundfläche ein Kreis ist: so muß man entweder den Durchmesser ab (fig. 186.) oder die Peripherie derselben messen, und nun nach dem §. 166.

167. verfahren. Der Quadratinhalt wird mit der Höhe multiplicirt, wie bey allen Prismatischen Körpern geschehen muß. — Der Beweis ist daher eben derselbe, welcher bey der Berechnung des 4eckichten Prisma's vorgekommen ist.

Z. B. es sey eine Mühlwelle lang 18′, der Durchmesser = 2′.

$$100 : 314 = 2 : \text{Peripherie}$$
$$\underline{\quad 2 \quad}$$
$$6{,}28 = \text{Peripherie}$$

6,28. $\frac{1}{2}$ = 3,14 Q. Schuh der Grundfläche

3,14. 18 = 56,52 Cubikschuh.

§. 270.

Anmerkung.

Die Cylinderberechnung kommt auch vor bey runden Säulen, cylindrischen Büchsen und andern Gefäßen, Brunnen, gleich dicken Baumstämmen u. s. w. Gesetzt, man wollte einen solchen Baum (oder wenigstens ein Stück vom Stamme desselben) als Cylinder berechnen: so müßte man erst den Umfang oder den Durchmesser des Baums messen. Den Umfang meßt man am besten mit einem Streifen Pergament, der in Schuhe und Zolle getheilt ist. Den Durchmesser mit einem Maasstabe, an welchem rechtwinkelicht zwey Lineale a b und c d gelegt werden, welche den Baum von drey Seiten einschließen. Nun zeigt die Zahl der Schuhe und Zolle von a nach c (fig. 187.) die Länge des Durchmessers e f. Die Figur stellt die kreisförmige Grundfläche des Baums vor.

Gesetzt,

Gesetzt, der Durchmesser ef sey = 12″

$$
\begin{array}{r}
100 : 314 = 12 : \text{Periph.} \\
12 \\
\hline
628 \\
314 \\
\hline
37{,}68
\end{array}
$$

37,68 . 3 = 113,04 Q. Zolle der Grundfläche.

Die Länge des Baums sey 40′ = 400″

113,04 . 400 = 45216 Cub. Zolle = 45′ 216″.

§. 271.

Aufgabe.

Die krumme Seitenfläche eines senkrechten Cylinders zu finden.

Auflösung. Multiplicire die Peripherie der Grundfläche mit der Höhe des Cylinders. Es sey die Periph. der Grundfl. = 12′, die Höhe des Cyl. = 10′, so ist der Inhalt der Seitenfläche = 120 Quad. Schuhe.

Beweis. Wenn man sich vorstellet, als sey ein Bogen Papier um einen Cylinder gelegt, daß er auf der krummen Oberfläche ganz davon bedeckt würde, und man legte den Bogen hernach auseinander: so würde man ein Parallelogramm haben, dessen Grundlinie gleich der Peripherie der Grundfläche des Cyl., und Höhe gleich der Höhe des Cyl. wäre. Daher muß diese krumme Fläche an Flächeninhalt dem Parallelogramm gleich seyn.

Werden zu dieser Fläche noch die beyden Grundflächen des Cylinders addirt: so hat man die ganze Oberfläche desselben.

§. 272.

§. 272.

Eine Pyramide ist ein spitzer Körper, dessen Grundfläche eine gradlinichte Figur ist. Daher giebts dreyeckichte, viereckichte, vielseckichte Pyramiden. Eine Linie von der Spitze senkrecht auf die Grundfläche heißt die Höhe der Pyramide. — Auch hier ist der Unterschied unter senkrechten und schiefen Pyramiden, wie bey den Prismatischen Körpern. Eine 3eckichte Pyramide hat 6, eine viereckichte 8 Kanten (überhaupt jede doppelt so viele, als die Grundfläche Ecken hat). — Eine 3eckichte hat 4, eine 4eckichte 5 körperliche Winkel, (überhaupt einen mehr, als die Grundfläche Ecken hat.)

§. 273.

Man kann sich die Entstehung einer Pyramide folgendermaasen vorstellen. Es werden (fig. 188.) von einem Punkte d über einer Figur abc grade Linien da, db, dc nach den Ecken der Figur gezogen. Durch diese Linien denkt man sich Seitenflächen gelegt; davon wird ein Körper begränzt, den man Pyramide nennt. — Diese Seitenflächen sind Triangel, die mit den Spitzen zusammen fallen, und deren Grundlinien in die Umfangslinien der Grundfläche fallen. Es sind ihrer also so viele, als die Grundfläche Seiten hat.

§. 274.

Ein Schnitt parallel mit der Grundfläche der Pyramide ist dieser ähnlich. — (Der Beweis ist leicht aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Triangel und anderer gradlinichten Figuren zu führen.)

§. 275.

Zwey Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind auch im körperlichen Inhalte gleich. Denn wenn man beyde, parallel mit der Grundfläche, in unzählig viele Scheibchen zerschnitte, die alle unendlich dünne wären: so würde 1) wegen der gleichen Höhe der Pyramiden, die Zahl der Scheibchen in beyden gleich seyn, 2) würden die beyden untersten Scheibchen, die 2ten, 3ten u. s. w. in beyden Körpern gleich seyn, da alle Querschnitte der Grundfläche ähnlich sind, und in gleichen Verhältnissen in beyden Körpern abnehmen. Also würden die unzählig vielen Scheibchen der einen Pyramide denen der andern gleich seyn.

§. 276.

Jede dreyeckichte Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma's von gleicher Grundfläche und Höhe.

Der Beweis läßt sich an einer Figur nicht so gut zeigen, als wenn man ein hölzernes dreyeckigtes Prisma in drey dreyeckichte Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe zerschneidet.

Fig. 189. Der erste Schnitt geschiehet durch d nach ab, der zweite durch daf. Dadurch entstehen 3 Pyramiden. 1) abcd, 2) bfad, 3) afed (der letzte Buchstaben d zeigt die Spitze der Pyramiden an.) 1 und 2 sind gleich, da die Grundfläche dcb von der Pyr. dcba, und Grundfläche dbf von der Pyr. dbfa gleich sind, und ihre Spitzen a zusammen fallen. Auch sind 2 und 3 gleich, weil die Grundfläche afb von der Pyram. afbd, und Grundfläche afe von der Pyr. afed gleich sind, und

und ihre Spitzen in d zusammen fallen. — Also sind die drey Pyramiden einander gleich.

§. 277.

Anmerkung.

Da jede vielseitige Pyramide, deren Grundfläche in Triangel zertheilt wird, in dreyeckichte Pyramiden zertheilt werden kann (so wie jedes Prisma in dreyeckichte Prismen): so gilt der vorige Satz allgemein, daß jede Pyramide der 3te Theil eines Prisma's von gleicher Grundfläche und Höhe ist.

§. 278.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt einer Pyr. zu finden.

Auflösung. Multiplicire die Grundfläche mit dem 3ten Theil der Höhe. — Z. B. Eine der Pyramiden bey Sakkara in Aegypten ist hoch 345′. Der dritte Theil davon ist 115′. Jede Seite der quadratförmigen Grundfläche ist lang 700′. Also die Grundfläche = 700. 700 oder

$$700^2 = 490000 \text{ Quad. Sch.}$$

$$\begin{array}{r} 115 \\ \hline 245 \\ 49 \\ 49 \\ \hline \end{array}$$

Inhalt der Pyramide = 56350000 Cub. Sch.

Anmerkung.

Die Fläche einer Pyramide findet man, wenn man jeden Tr., der sie umgiebt, besonders ausrechnet, und diese addiret.

§. 279.

Ein Kegel (fig. 190.) ist ein spitzer Körper, der statt der eckichten Grundfläche eine kreisförmige hat. Die Linie von der Spitze des Kegels a nach dem Mittelpunkte der Grundfläche e heißt die Axe des Kegels. — Steht die Axe senkrecht auf der Grundfläche, so ist der Kegel ein senkrechter; steht sie aber schief darauf, so ists ein schiefer Kegel. Die krumme Oberfläche ist so beschaffen, daß jede grade Linie ad ganz in sie fällt, welche von der Spitze a nach irgend einem Punkte in der Peripherie der Grundfläche gezogen wird.

§. 280.

Die Entstehung des senkrechten Kegels kann man sich auf zweyerley Art vorstellen. 1) Aus einem Punkte a grade über dem Mittelpunkte eines Kreises ziehe eine Linie in die Peripherie desselben, und führe sie darin herum. Diese Linie beschreibt eine krumme Fläche, die den Kegel begränzt. — 2) Oder bewege einen rechtwinkelichten Tr. aed um die eine feststehende Seite ae, so beschreibt der Punkt d die Peripherie der kreisförmigen Grundfläche, und die Linie ad die krumme, den Kegel begränzende, Fläche.

§. 281.

Die Schnitte parallel mit der Grundfläche wie der Schnitt durch b und c sind Kreise. Durch einen solchen Schnitt wird ein ähnlicher kleiner Kegel abc oben abgeschnitten. Das übrige Stück zwischen df und bc ist ein abgekürzter oder abgestumpfter Kegel.

§. 282.

Senkrechte und schiefe Kegel (fig. 190.) von gleichen Grundflächen und Höhe sind dem Inhalte nach gleich. Der Beweis ist wie bey der Pyramide. Denn jeder Kegel ist als eine Pyramide anzusehen, deren Grundfläche unzählig viele Ecken hat.

§. 283.

Wenn man daher einen Kegel und einen Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe, und eine Pyramide und ein Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe gegen einander betrachtet; so muß sich der Kegel zum Cylinder, wie die Pyramide zum Prisma verhalten. Da nun die Pyramide der dritte Theil vom Prisma ist: so ist auch der Kegel der dritte Theil vom Cylinder, der ihm in der Grundfläche und Höhe gleich ist.

§. 284.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Kegels auszurechnen.

Auflösung. Multiplicire die Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe (einer senkrechten Linie von der Spitze auf die Grundfläche.) Z. B. $\frac{1}{3}$ der Höhe sey = 10', die Peripherie der Grundfläche = 22", so ist der Durchmesser = 7", Grundfläche = $\frac{7 \cdot 22}{4}$ Quad. Zolle.

Das ist = $38\frac{1}{2}$ Quad. Zoll. Dies mit 10' oder 100" einem Drittel der Höhe multiplicirt, giebt 3850 Cub. Zolle für den Kegel.

§. 285.

§. 285.

Aufgabe.

Die krumme Fläche, welche den senkrechten Kegel umgiebt, auszurechnen.

Auflösung. (fig. 190.) Multiplicire die Peripherie der Grundfläche mit der halben Seitenfläche des Kegels a d.

Beweis. Wenn man von der Spitze a unzählig viele Linien nebeneinander in die Peripherie der Grundfläche ziehet: so entstehen unzählig viele schmale Triangel, deren Grundlinien so klein sind, daß man sie als grade Linien ansehen kann. Alle diese kleinen Grundlinien zusammen machen die Peripherie der Grundfläche aus. Die krumme Fläche ist anzusehen, als bestünde sie aus allen diesen unzählig vielen schmalen Triangeln zusammengenommen. Da man nun den Flächeninhalt aller dieser Triangel findet, wenn man ihre Grundlinien addiret und diese Summe mit der halben Höhe (halb ad) multipliciret: so muß auf diese Art auch der Inhalt der krummen Fläche des senkrechten Kegels heraus kommen.

Addirt man dazu den Inhalt der Grundfläche: so hat man die ganze Fläche, welche den Kegel umgiebt.

§. 286.

Es giebt mancherley Körper, welche die Form eines abgekürzten Kegels haben, z. B. Eimer, Trinkgläser und andere Gefäße; Stämme von Tannen, Eichen und andern gradgewachsenen Bäumen, wo das obere Holz des Baumes aus Aesten bestehet, und der Stamm

selbst

selbst einem Kegel gleichet, dessen Spitze fehlet. Daher ist folgende Aufgabe besonders für den Forstverständigen wichtig.

§. 287.

Den Inhalt eines abgekürzten Kegels zu finden.

Auflösung. Rechne zuerst den ganzen Kegel aus: hierauf den obern abgeschnittenen, und ziehe den letztern vom ganzen Kegel ab.

Fig. 190. sey der Durchschnitt eines Kegels: dfcb ist der abgekürzte, und acb der fehlende Kegel. Man messe zuerst

den untern Durchmesser df = 28″
den obern Durchmesser bc = 14″
die Länge eo = 90″

Nun muß die Höhe des fehlenden Kegels, nämlich oa ausgerechnet werden. Ziehe bn parallel mit aoe, so ist Tr. dnb ähnlich dem Tr. boa. Also

dn : nb = bo : oa.

Um dn zu finden, ziehe den Halbmesser bo = 7 von dem Halbmesser dc = 14 ab, so ist dn = 7″.

Also 7 : 90 = 7 : 90.
oa ist = 90″, und ea = 180″.

Nun berechne man die untere Grundfläche. Weil df = 28″, so ist die Peripherie = 88″. (Denn 7 : 22 = 28 : 88.)

88. 7 = 616 Quad. Zolle = Grundfläche des ganzen Kegels. Dies multiplicire mit dem 3ten Theil der Höhe, $\frac{180}{3} = 60$, so kommt für den ganzen Kegel = 36960 Cub. Zolle.

Der

Der obere Durchmesser bc ist = 14″, also die Peripherie = 44″. Daher die Fläche = $\frac{14 \cdot 44}{4}$ = 154 Q. Zolle.

Dies mit dem dritten Theil von 90 (der Höhe 90), also mit 30 multiplicirt, giebt den Inhalt des obern abgeschnittenen Kegels = 30. 154 = 4620 Cub. Zolle

Dies wird abgezogen von 36960

Inh. des abgek. Keg. = 32340 Cub. Zolle.

§. 288.

Zwey Prismate, oder 2 Cylinder, oder 2 Pyramiden, oder 2 Kegel von gleichen Grundflächen und verschiedenen Höhen, oder von gleichen Höhen und verschiedenen Grundflächen verhalten sich in Ansehung ihres körperlichen Inhalts im ersten Falle wie die verschiedenen Höhen, und im andern Falle wie die verschiedenen Grundflächen.

Wir wollen dieses erst an den Cylindern sehen. Die Cylinder (fig. 191.) sollen gleiche Grundflächen, jede 8 Quadratzolle, haben, ihre Höhen sollen seyn 10″ und 20″, also sich verhalten wie 1 : 2. Der Inhalt beyder verhält sich also wie

8. 10 : 8. 20 das ist wie 10 : 20 oder 1 : 2.

Denn die Produkte haben einen Faktor 8 gemeinschaftlich. Daher kann man ihn weglassen, ohne daß das Verhältniß geändert wird. — Fig. 192. seyen zwey Cylinder von gleicher Höhe (jeder sey 8″ hoch). Ihre Grundflächen sollen seyn 5 Quadratzolle und 15 Quadratzolle, die sich also verhalten wie 1 : 3. Die körperlichen Inhalte verhalten sich wie 10. 5 : 10. 15 oder wie 5 : 15 oder wie 1 : 3.

Eben

Eben dies gilt auch von Pyramiden und Kegeln, wo der dritte Theil der Höhe als Faktor in Rechnung kommt, welches in der Sache selbst keinen Unterschied macht.

§. 289.

Eine **Kugel** ist ein runder Körper, der von einer krummen Fläche (der **Oberfläche**) so eingeschlossen ist, daß alle Punkte derselben gleich weit von dem Mittelpunkte abstehen. Dreht sich ein Halbkreis um den feststehenden Durchmesser, so entstehet eine Kugel. — Man mag die Kugel durchschneiden, wo man will, so entstehet ein Kreis. Der größte Kreis entstehet, wenn man den Schnitt durch den Mittelpunkt führet.

§. 290.

Wenn man folgende drey Körper, einen Cylinder, einen Kegel, und eine Halbkugel (fig. 193.) sich vorstellt, die 1) gleiche Höhe haben, 2) wo die Grundfläche des Cylinders und Kegels und des größten Kreises der Halbkugel gleich sind; so müssen sich diese Körper in Ansehung ihres körperlichen Inhalts gegen einander verhalten, wie 3, 2, 1, oder der Kegel muß $\frac{1}{3}$ und die Halbkugel $\frac{2}{3}$ vom Cylinder halten.

Fig. 194. abcd sey der Durchschnitt des Cylinders. In ihm liege der Durchschnitt der Halbkugel cmd, und der Durchschnitt des Kegels afb, (dessen Spitze f unten steht.) Von dem Kegel ist bekannt, daß er den dritten Theil des Cylinders enthält, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat (§. 280.) Nun muß bewiesen werden, daß wenn ich den Inhalt des Kegels von dem Inhalte des Cylinders

linders abziehe, der Inhalt der Halbkugel übrig bleibt, und also die Halbkugel zwey Drittheile vom Cylinder ist.

Würde man diese drey Körper, parallel mit der Grundfläche in unendlich viele Scheibchen schneiden, so müßte die Zahl dieser Scheibchen in allen dreyen gleich groß seyn, weil sie gleich hoch sind.

Es muß also gezeigt werden, daß, man mag den Schnitt machen, wo man will, wenn man das Scheibchen des Kegels von dem des Cylinders abziehet, das Scheibchen der Halbkugel übrig bleibt.

Gesetzt, man machte den Schnitt durch noxyz, so wäre

ox der Halbmesser des Scheibchens im Kegel
oy — — — — — in der Halbkugel
oz — — — — — im Cylinder.

Ziehe fy, so entstehet ein rechtwinkelichter Tr. ofy, dessen drey Seiten den so eben genannten Halbmessern gleich sind. 1) oy ist eine kürzere Seite, 2) ox = of, weil ox parallel mit mb lauft, also bm : fm = ox : of. Nun ist bm = fm, also auch ox = of. 3) oz = fy, weil oz = fd und fd = fy (als Halbmesser der Kugel.) Nach dem Pythagorischen Lehrsatze (§. 115.) bleibt, wenn man das Quadrat von of von dem Quadrat von fy abziehet, das Quadrat von oy übrig. Die Kreise verhalten sich aber gegen einander, wie die Quadrate auf ihren Durchmessern (§. 172.), also auch wie die Quadrate auf ihren Halbmessern (weil sich das Quadrat eines Durchmessers zu dem Quadrate des Halbmessers immer wie 4 : 1 verhält). Weil nun

1) das Quadrat von of das Quadrat des Halbmessers im Scheibchen vom Kegel ist,

2) das Quadrat von fy das Quadrat des Halbmessers im Scheibchen von dem Cylinder,

3) das Quadrat von oy das Quadrat des Halbmessers im Scheibchen von der Halbkugel:

so muß, wenn man das Scheibchen des Kegels vom Scheibchen des Cylinders abziehet, das Scheibchen der Halbkugel übrig bleiben.

Dieser Beweis gilt überall, man mag die Scheibchen schneiden, wo man will. Also müssen alle Scheibchen der Halbkugel übrig bleiben, wenn man den Inhalt aller Scheibchen des Kegels von dem Inhalte aller Scheibchen des Cylinders abziehet.

Es ist daher erwiesen, daß die Halbkugel $\frac{2}{3}$ von dem Cylinder ist.

Hieraus folgt, daß eine ganze Kugel auch $\frac{2}{3}$ von dem Cylinder ist, dessen Höhe dem Durchmesser, und dessen Grundfläche dem größten Kreise der Kugel gleich ist.

§. 291.

Aufgabe.

Den Inhalt einer Kugel zu finden.

Auflösung. Berechne den größten Kreis, und multiplicire ihn mit dem Durchmesser. Von dem Produkte nehme zwey Drittheile.

Z. B. Der Durchmesser der Erde ist ohngefähr 1720 deutsche Meilen. Die Peripherie des größten Kreises = 5400 d. M. Also die

Fläche

Fläche desselben = 430. 5400 = 2322000 deutsche Quadratmeilen. Zwey Drittheile davon sind = 1548000. Dieses mit 1720 multipliciret, giebt 2662560,000 Cubikmeilen.

Anderes Beyspiel. Der Durchmesser sey = 100'. Die Peripherie = 314'. Die Fläche des größten Kreises $= \frac{314 \cdot 100}{4} = 7850$ Quad. Schuhe. Dieses mit 100 multipliciret = 785000. Davon $\frac{2}{3}$ genommen, macht $523333\frac{1}{3}$ Cubikschuhe.

§. 292.

Da die Kugeln sowohl als die Würfel einander ähnlich sind: so steht eine Kugel gegen den Würfel ihres Durchmessers in demselben Verhältniß, wie eine andere Kugel zu dem Würfel ihres Durchmessers.

Um dieses Verhältniß zu finden, wollen wir nach dem Beyspiel des vorigen §. vom Durchmesser der Kugel, (deren Inhalt $523333\frac{1}{3}$ Cubikschuhe ist) = 100 den Würfel nehmen. Dieser ist = 1000000. Also verhält sich jede Kugel zu dem Würfel ihres Durchmessers wie $523333\frac{1}{3}$: 1000000, oder wenn man beyderseits mit 3 multipl. wie 1570000 : 3000000, oder wenn man in beyden 4 Nullen wegstreicht (das ist mit 10000 dividiret) wie 157 : 300, welches Verhältniß beynahe richtig ist.

§. 293.

Nach diesem Verhältnisse kann man leicht den Inhalt einer Kugel berechnen, wenn man ihren Durchmesser weiß. Man nimmt nämlich den Würfel davon, und sagt nach der Regel de Tri, wie sich verhält 300 zu 157, so verhält

sich der Würfel des Durchmessers der Kugel zu ihrem körperlichen Inhalt.

Z. B. der Durchmesser sey 12″. Also der Würfel davon = 12. 12. 12 = 1728 Cubikzolle.

```
300 : 157 = 1728
             157
           ------
           12096
           8640
          1728
         -------
300)    271296 | 904⅓ Cubikzolle ist der
        2700           Inhalt der Kugel
        ------
          1296
          1200
        ------
            96
```

Anderes Beyspiel. Will man wissen, wie viel Mal mehr körperlichen Inhalt die Sonne als die Erde enthält: so nimmt man von 111 (als der Zahl, welche anzeigt, wie viel Mal der Durchmesser der Erde in dem Durchmesser der Sonne enthalten ist) den Cubus = 1367631. So viele Erdkugeln müßte man zusammenthun, um eine Sonnenkugel daraus zu machen.

§. 294.

Eine Kugel wird einer Pyramide gleichen, deren Grundfläche der ganzen Kugelfläche, und deren Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

Beweis. Man stelle sich vor, die ganze Oberfläche der Kugel sey in unendlich kleine Quadrate getheilt, und es bewegte sich eine im Mittelpunkte bevestigte Linie um diese kleine Quadrate, die von einer kleinen ebenen Fläche nicht

nicht merklich mehr unterschieden sind: so sehen wir, wie eine Kugel aus unendlich vielen Pyramiden bestehe. Diese alle zusammen sind einer Pyramide von derselben Höhe gleich, wenn auch ihre Grundfläche der Summe aller Grundflächen dieser kleinen Pyramiden zusammen genommen gleich ist.

§. 295.

Da der Inhalt einer Pyramide ein Produkt ist, dessen Faktoren 1) der dritte Theil der Höhe, 2) die Grundfläche ist (§. 275), und wenn man ein Produkt durch den einen Faktor dividirt, der andere Faktor als Quotient herauskommen muß: so darf man nur den körperlichen Inhalt einer Pyramide mit dem $\frac{1}{3}$ Theil der Höhe dividiren, um die Grundfläche zu erfahren. Hieraus folgt nach dem vorigen §. daß man den Inhalt einer Kugel nur mit dem 3ten Theil des Halbmessers, oder 6ten Theil des Durchmessers dividiren darf, wenn man ihre Oberfläche wissen will.

§. 296.

Die Oberfläche einer Kugel verhält sich zur Fläche des größten Kreises durch den Mittelpunkt, wie 4 : 1.

Beweis. Wenn der Durchmesser = 100′, die Peripherie = 314′, so ist der Inhalt = 523333 $\frac{1}{3}$ Cubikschuh (§. 288). Dies mit dem sechsten Theil des Durchmessers $\frac{(100)}{6}$ dividirt, giebt die Oberfläche der Kugel (§. 292) = 31400 Quadratschuhe. Nun ist die

die Fläche des größten Kreises = 314. 25 = 7850 Quadratschuhe. Also das gesuchte Verhältniß 31400 : 7850, beydes mit 7850 dividirt, giebt 4 : 1.

§. 297.

Man erhält daher die Oberfläche der Kugel, wenn man den größten Kreis ausrechnet, und viermal nimmt, das ist, wenn man die Peripherie nicht mit dem 4ten Theil des Durchmessers, sondern mit dem ganzen Durchmesser multipliciret.

§. 298.

Wird nun diese Kugelfläche mit dem sechsten Theil des Durchmessers multiplicirt, so erhält man den Inhalt der Kugel (§. 291).

§. 299.

Anmerkung.

Man kann also eine Kugel auf dreyerley Art ausrechnen. 1) Nach §. 288., wenn man sie als $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder von gleicher Höhe und Dicke betrachtet, 2) nach §. 250., wenn man des Durchmessers Würfel ausrechnet, und zu 300, 157, und diesem Würfel die 4te Proportionalzahl ausrechnet, 3) nach §. 295., wenn sie einer Pyramide gleich gesetzt wird, deren Grundfläche und Höhe der Kugelfläche und dem Halbmesser gleich sind.

§. 300.

Anmerkung.

Ausser dem Würfel giebt es noch 4 reguläre Körper.

1) Das Tetraedrum, welches von 4 gleichseitigen und gleich großen Triangeln begrenzt wird.

2)

2) Das Oktaedrum, welches von 8 gleichseitigen und gleich großen Triangeln begrenzt wird.

3) Das Ikosaedrum, welches von 20 gleichseitigen und gleich großen Triangeln begrenzt wird.

4) Das Dodekaedrum, welches von 12 regulären und gleich großen Fünfecken begrenzt wird.

Diese Körper kommen im gemeinen Leben wenig vor: wie man sie aus Papier zusammensetzen könne, wird §. 303. gelehrt.

§. 301.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Fasses zu finden.

Auflösung. Da das Faß in der Mitte dicker, als an beyden Enden ist:. so ist ein Faß größer, als ein Cylinder von gleicher Länge, wenn seine Grundfläche der Grundfläche des Faßbodens gleich wäre — und kleiner, als ein Cylinder, der den mittlern Durchschnitt, oder Bauchschnitt, zur Grundfläche hätte. Der mittlere Cylinder, welcher dem Fasse an Inhalt nahe kömmt, wird gefunden, wenn man die Kreisflächen des Bodens und Bauchschnitts ausrechnet, addiret, davon das Mittel nimmt, und dies mit der Länge des Fasses multipliciret.

Eigentlich sind die gewöhnlichen Fässer etwas größer. Um den Fehler zu verbessern, hat Herr Professor Busse folgende leichte Regel vorgeschlagen:

1) Rechne den mittlern Cylinder auf die so eben beschriebene Art aus: — 2) Nehme den Unterschied zwischen Bauchdurchmesser und Bodendurchmesser, multiplicire damit den mittlern Cylinder, und dividire, was herauskommt,

mit

mit dem dreyfachen Bauchdurchmesser. — 3) Die so gefundene Zahl addire zu dem mittlern Cylinder: so hat man hinlänglich genau den Inhalt des Fasses.

Exempel, (aus Herrn Vieths Mathematik für Bürgerschulen). Das große Faß auf dem Königstein in Sachsen hat folgende Abmessungen:

Länge — — — 34′
Bauchdurchmesser — — 24′
Bodendurchmesser — — 22′

Also: Peripherie am Bauche — $78\frac{2}{7}$′
Peripherie am Boden — $69\frac{1}{7}$′

Ferner: Bauchschnitt — $452\frac{4}{7}$ Quad. Sch.
Bodenschnitt — 380 (ohngefähr) —
452
———
832 die Hälfte ist 416
416
mit der Länge multipl. 34
———
1664
1248
———
Mittlerer Cylinder = 14144 Cubikschuhe.
Dies mult. mit dem Unterschied der Durchm. 2
———
div. mit d. 3fach. Bauchdurchm. 72) 28288 | $392\frac{8}{9}$ Cubikschuhe.
216
———
668
648
———
208
144
———
64
14144
———
$392\frac{8}{9}$
Inh. d. Fasses = $14536\frac{8}{9}$ Cub. Schuhe.

§. 302.

§. 302.

Aufgabe.

Eines irregulären Körpers Inhalt zu finden, wenn er nicht groß ist.

Auflösung. Lege ihn in einen Kasten (fig. 195.), der die Gestalt eines Parallelepipedums hat. Uebergieße ihn mit Wasser, oder wenn er dieses nicht vertragen kann, mit feinem Sande. Merke die Höhe an, wo das Wasser oder der Sand stehet. Nehme hierauf den Körper heraus, merke nun die Höhe ac. Weil nun der Inhalt des Körpers dem Parallelepipedum bcdmno gleich ist: so berechne dieses nach §. 255.

Z. B. Es sey bc = 8′, cd = 4′, bm = 2′, so ist der Körper = 64 Cubikschuhe.

§. 303.

Wenn man die geometrischen Körper aus Papier oder Pappe zusammenlegen will: so entwirft man zuerst Zeichnungen, welche die Netze derselben heißen, aus denen man sie hernach zusammenlegt. Die punktirten Linien in den Figuren bedeuten die Ränder, welche man bey dem Ausschneiden stehen läßt, um die Körper hernach bequem zusammen leimen zu können.

1) Fig. 196. ist das Netz des Tetraedrums. Zeichne einen gleichseitigen Tr. abc, theile die Seiten in def, ziehe die Linien de, ef, fd.

2)

2) Fig. 197. ist das Netz des Oktaedrums. Zeichne zwey dergleichen Tr. abc und dlg, so, daß sie mit dc zusammen liegen.

3) Fig. 198. ist das Netz des Würfels. Zeichne 6 gleiche Quadrate, 4 in eine Reihe, und noch zwey auf beyden Seiten des 1ten Quadrats iklm.

4) Fig. 199. ist das Netz des Dodekaedrums. Zeichne ein reguläres Fünfeck abcde, lege das Lineal an d und b, ziehe bl = ab, lege es hernach an d und a, ziehe ag = ab. Mache auch gq und lq = ab. Nun sind die Fünfecke abcde und ablqg gleich. Auf eben die Art zeichne die andern Fünfecke, und an fk hänge eine gleiche Figur, die aus Fünfecken besteht.

5) Fig. 200. ist das Netz des Ikosaedrums. Ziehe eine Linie ad, theile sie in 5 gleiche Theile, und zeichne auf jede Seite der Linie ad 5 gleichseitige Tr. Ziehe die Linie ce, und zeichne darauf auch 5 gleichseitige Triangel.

6) Fig. 201. ist das Netz des Parallelepipedums. Zeichne ein Rechteck cfhi. Verlängere die 4 Linien auf beyden Seiten. Zeichne auf die 4 Seiten noch 4 Rechtecke, so daß die gegenüberstehenden gleich sind, und daß die Linien ae, el, mf, ik, io, nh, hb gleich sind. An gk zeichne noch ein Rechteck gdck = fihe.

7) Fig. 202. ist das Netz eines dreyeckichten Prisma's. Zeichne drey länglichte Recht-

Rechtecke neben einander. An das mittelste setze oben und unten gleichseitige Triangel.

8) Fig. 203. ist das Netz der Pyramide. Zeichne 3 gleichschenkelichte Tr. nebeneinander, so daß ihre Spitzen in a zusammen fallen. An den mittelsten setze unten einen gleichseitigen Triangel.

9) Fig. 204. ist das Netz des Cylinders. Zeichne ein länglichtes Rechteck abcd, und oben an a und b zwey gleich große Kreise, deren Peripherie = bc.

Inhalt.

Seite

Erstes Kapitel. Erklärungen von Linien, Winkeln und Figuren . . 3

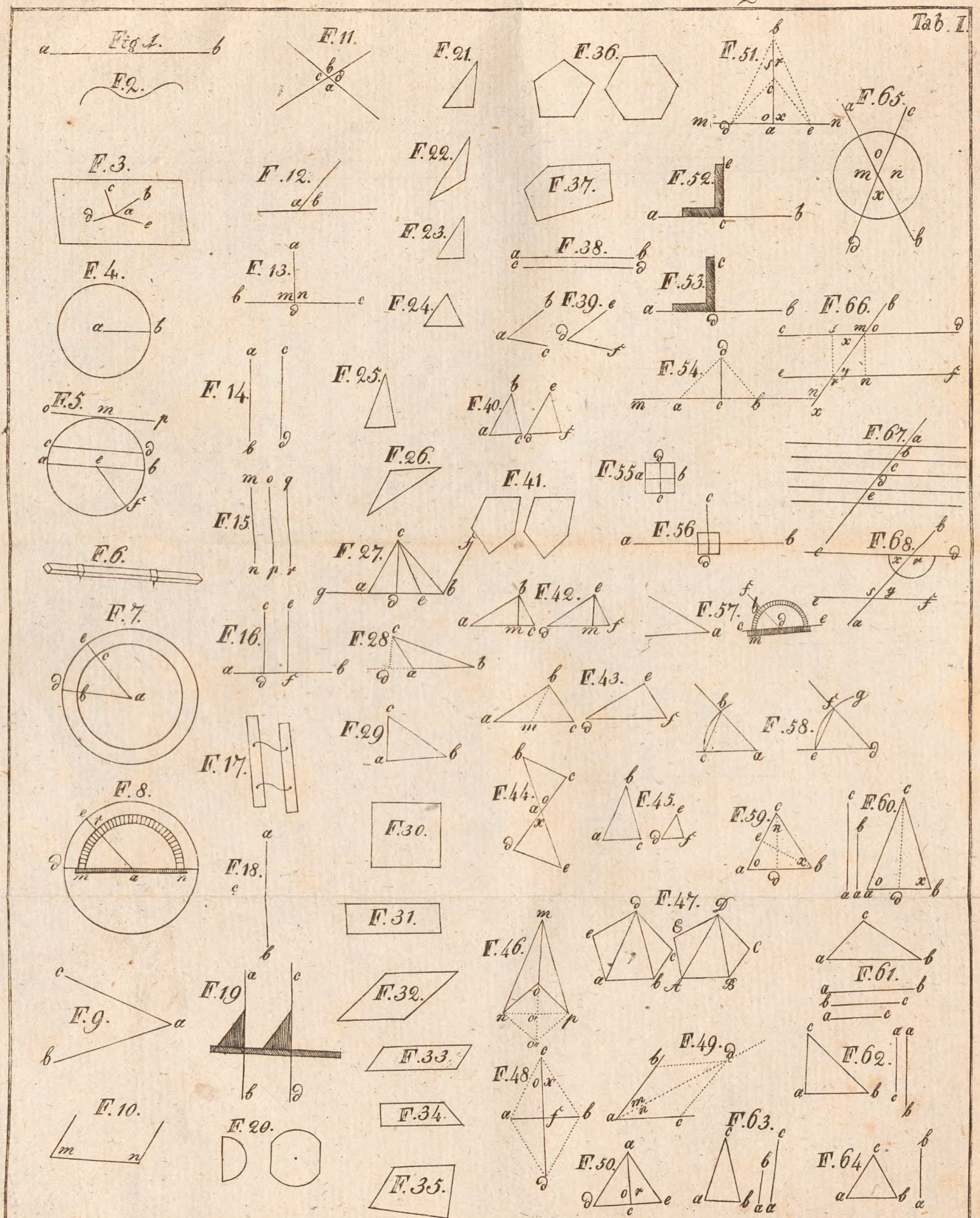
Zweytes Kapitel. Von der Gleichheit der Triangel 21

Drittes Kapitel. Von der Ausmessung der Flächen 71

Viertes Kapitel. Von der Aehnlichkeit der Triangel . . . 88

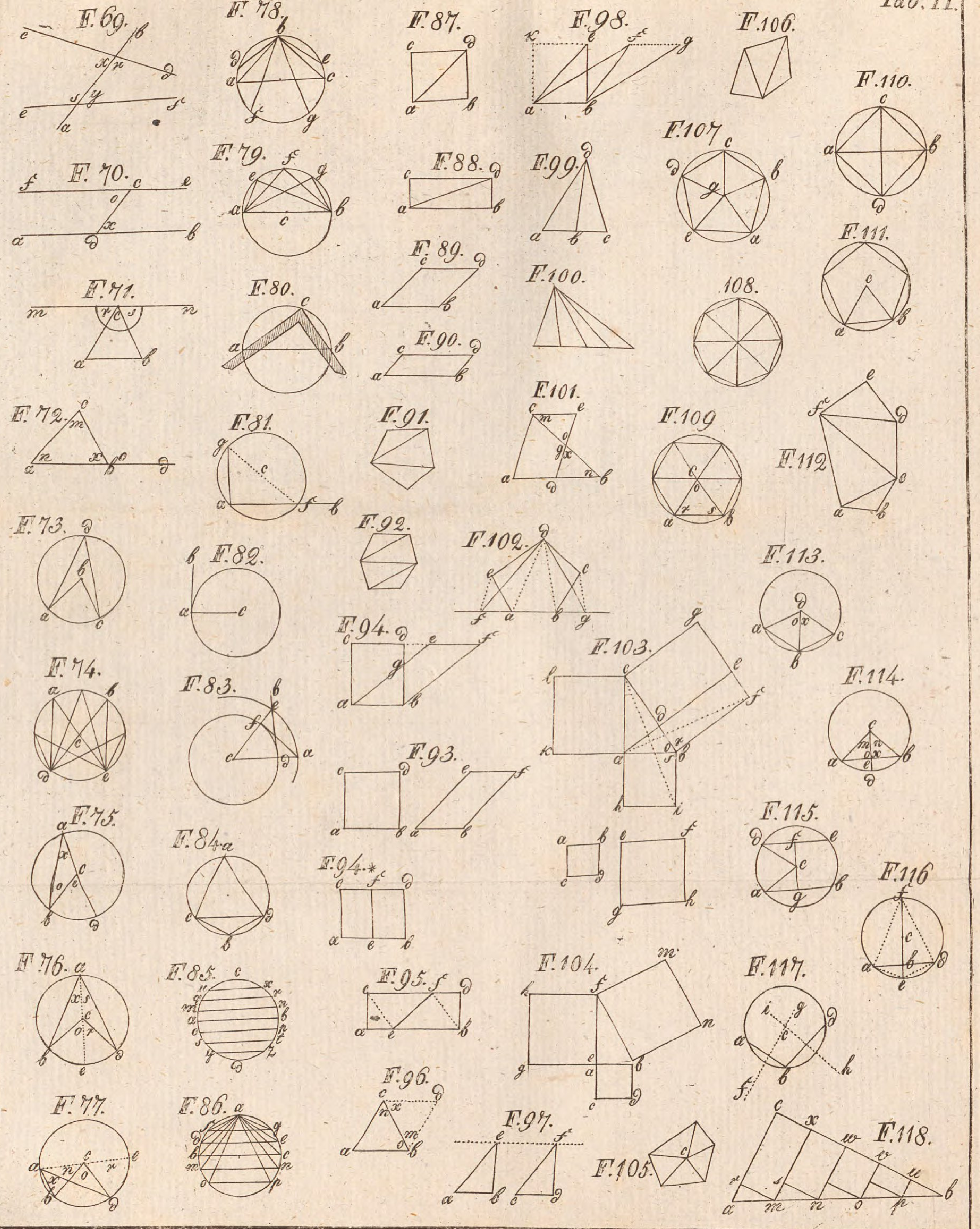
Fünftes Kapitel. Von den Körpern und ihrer Ausmessung . . 155

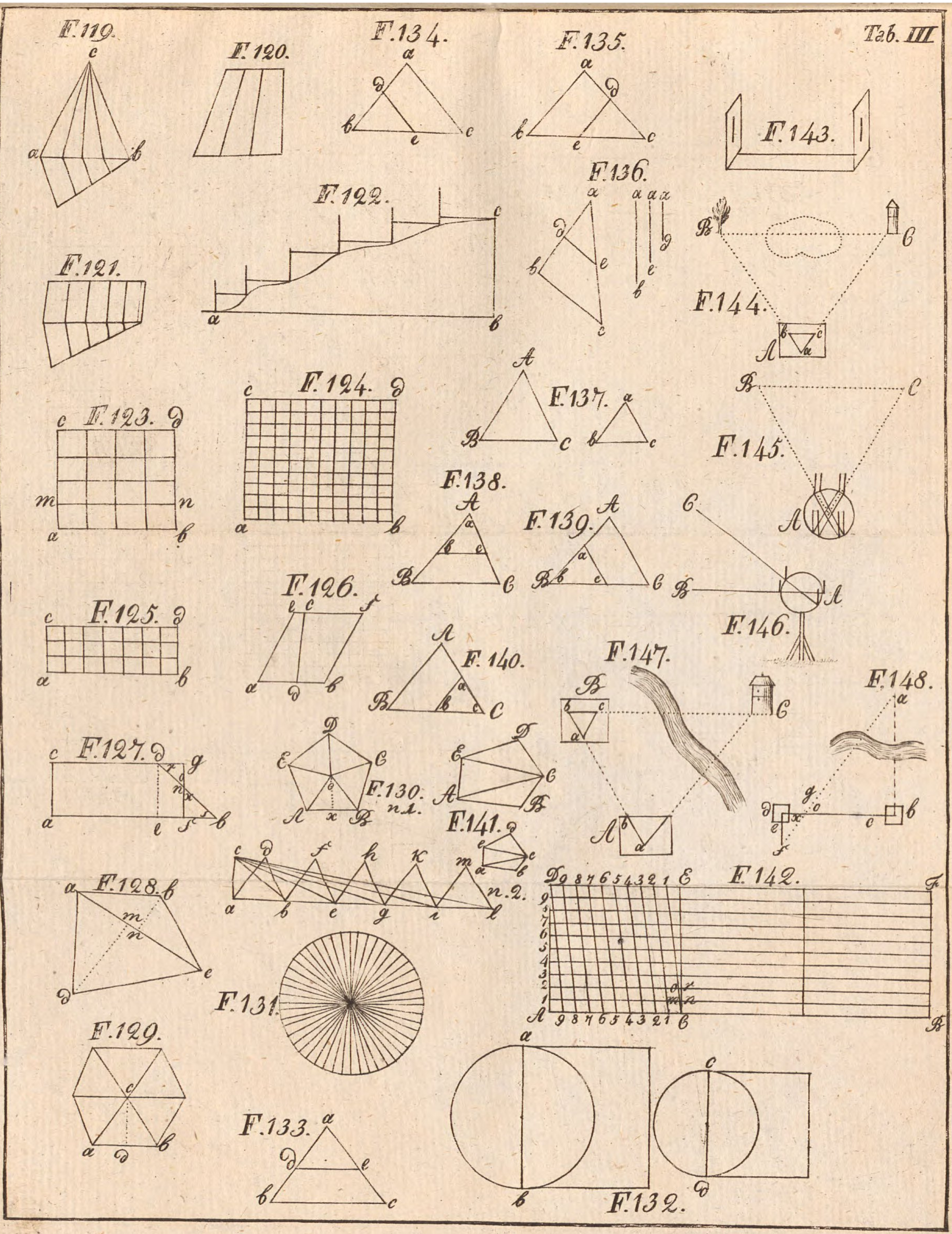
zu Snells Lehrbuch



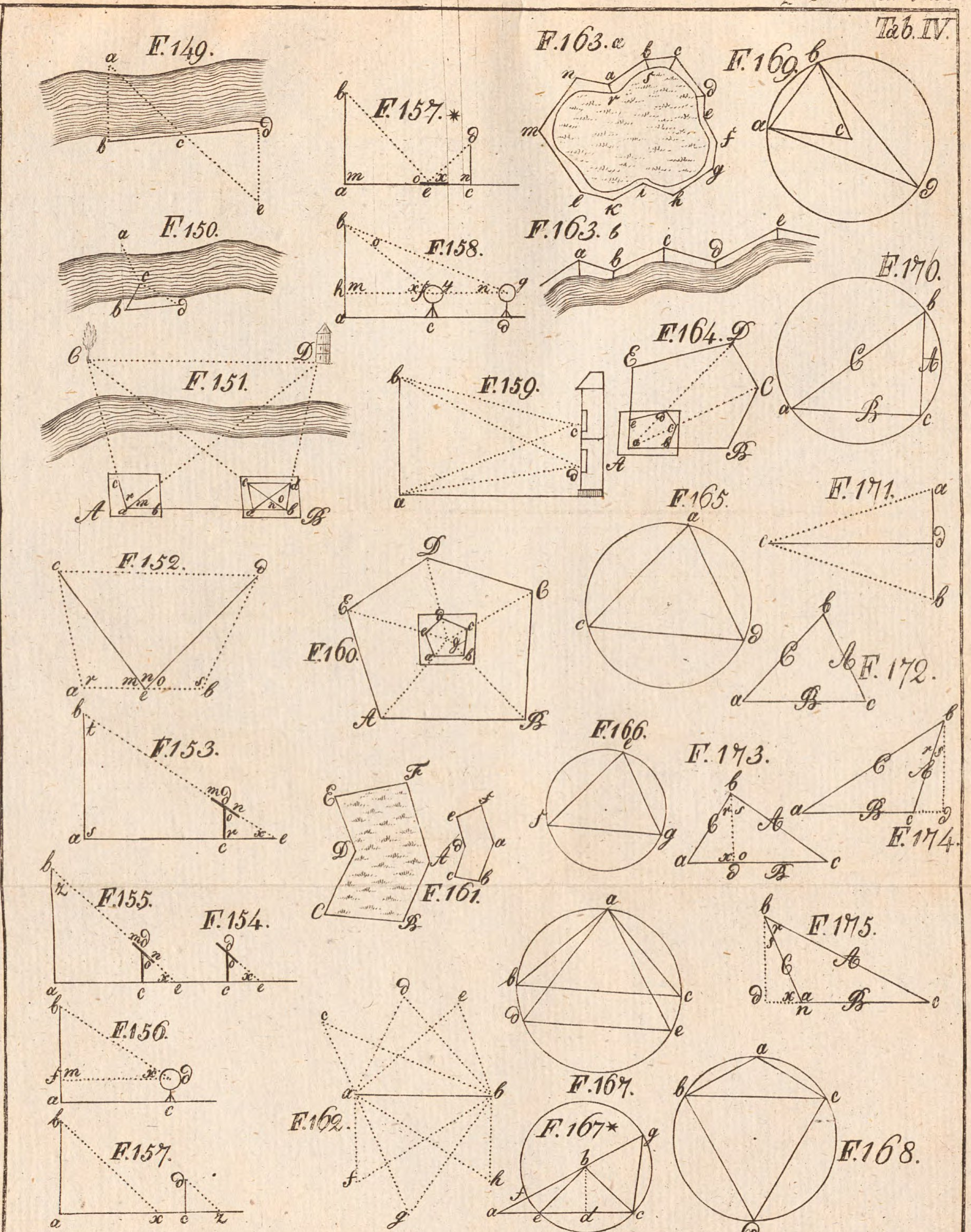
zu Snells Lehrbuch

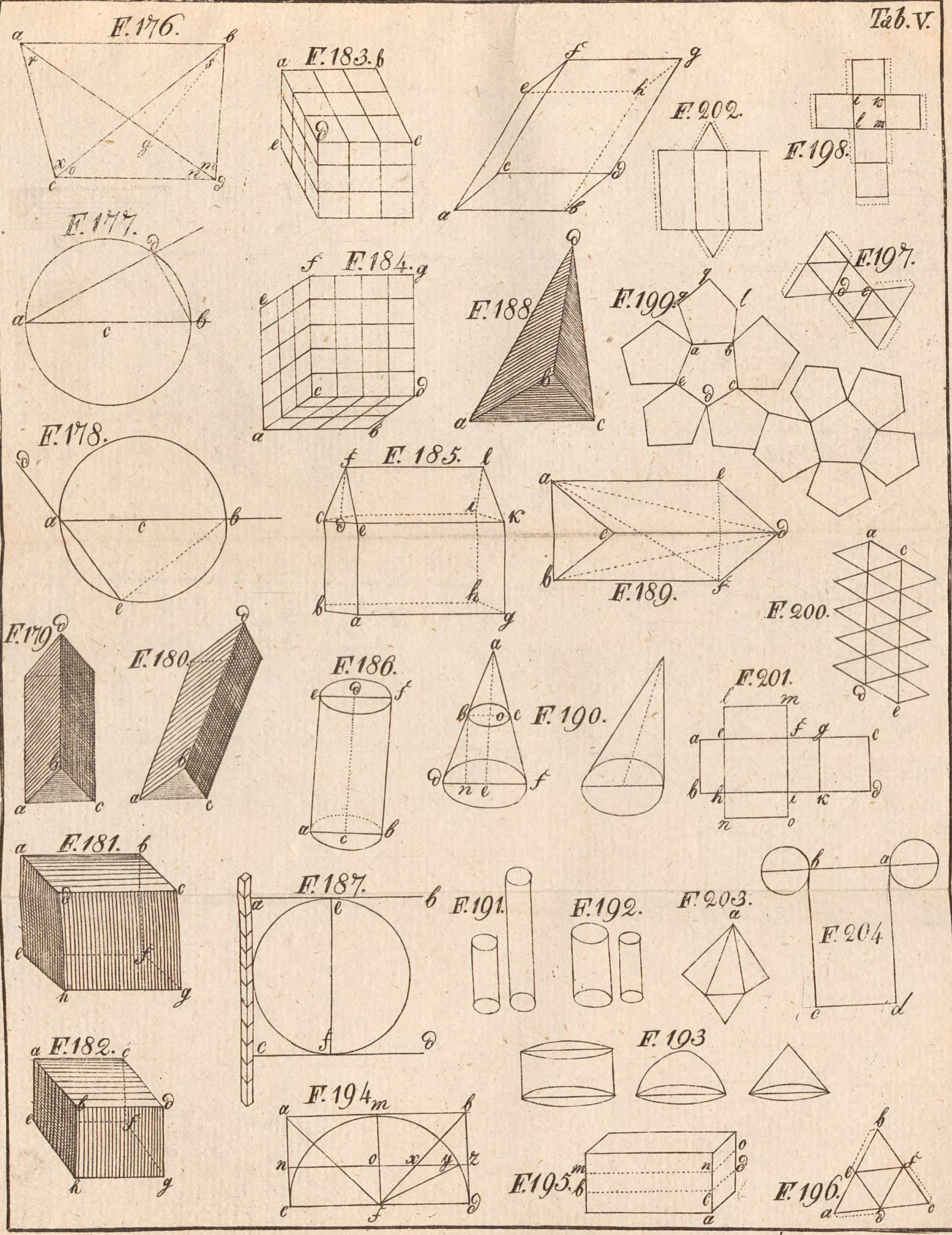
Tab. II.




Tab. III
F.119.
F.120.
F.121.
F.122.
F.123.
F.124.
F.125.
F.126.
F.127.
F.128.
F.129.
F.130.
F.131.
F.132.
F.133.
F.134.
F.135.
F.136.
F.137.
F.138.
F.139.
F.140.
F.141.
F.142.
F.143.
F.144.
F.145.
F.146.
F.147.
F.148.

zu Snells Lehrbuch




F. 176.
F. 183.
F. 202.
F. 198.
F. 177.
F. 184.
F. 188.
F. 199.
F. 197.
F. 178.
F. 185.
F. 189.
F. 200.
F. 179.
F. 180.
F. 186.
F. 190.
F. 201.
F. 181.
F. 187.
F. 191.
F. 192.
F. 203.
F. 204
F. 182.
F. 193
F. 194
F. 195.
F. 196.

Quand on a une longue addition, p. ex.

$4/6 + 7/8 + 10/24 + 5/48 + 18/104 + 9/19 + 8/54$.

Voici come il faut opérer:

1º. Chercher d'abord le ~~comun~~ dénominateur comun de $4/6 + 7/8 + 10/24$, en ~~additi~~ multipliant les dénominateurs & numérateur d'un des nombres par produit des deux autres; on trouvera alors q. le plus g.d de ces 3 nombres est 1152.

2º. Chercher ensuite le dénominateur des 3 suivans $5/48 + 18/104 + 9/19$, opérant de la même manière sur ces nombres que sur les 1ers; on trouvera ~~plus grand~~ dénominateur comun, 94848.

3º. Enfin on cherchera le dénominateur des 3 derniers $18/104 + 9/19 + 10/24$; on trouvera 106,704, qui est le plus grand dénominateur comun de la some.

4º. On divisera ce dénominateur comun par le dénominateur particulier de chacun des nombres de la règle; & on multipliera le quotient qu'on aura trouvé par chacun des numérateurs; on additionnera tous ces produits ~~quotiens~~, & la some sera le numérateur général, du dénominateur comun.

Exemple.

Dén: com: 106,704.

	Quotiens	Produits
4/6	17784	71136
7/8	13338	93366
10/24	4446	44460
5/48	2223	11115
18/104	1026	18468
9/19	5616	50544
8/54	1976	15808

$\frac{304,897}{106,704} = 2\frac{91,489}{106,704}$.

48.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Snell, Friedrich Wilhelm Daniel,

Leichtes Lehrbuch der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie für die ersten Anfänger

Bd.: 2

Gießen und Darmstadt 1813

Math.p. 532 f-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082844-2